

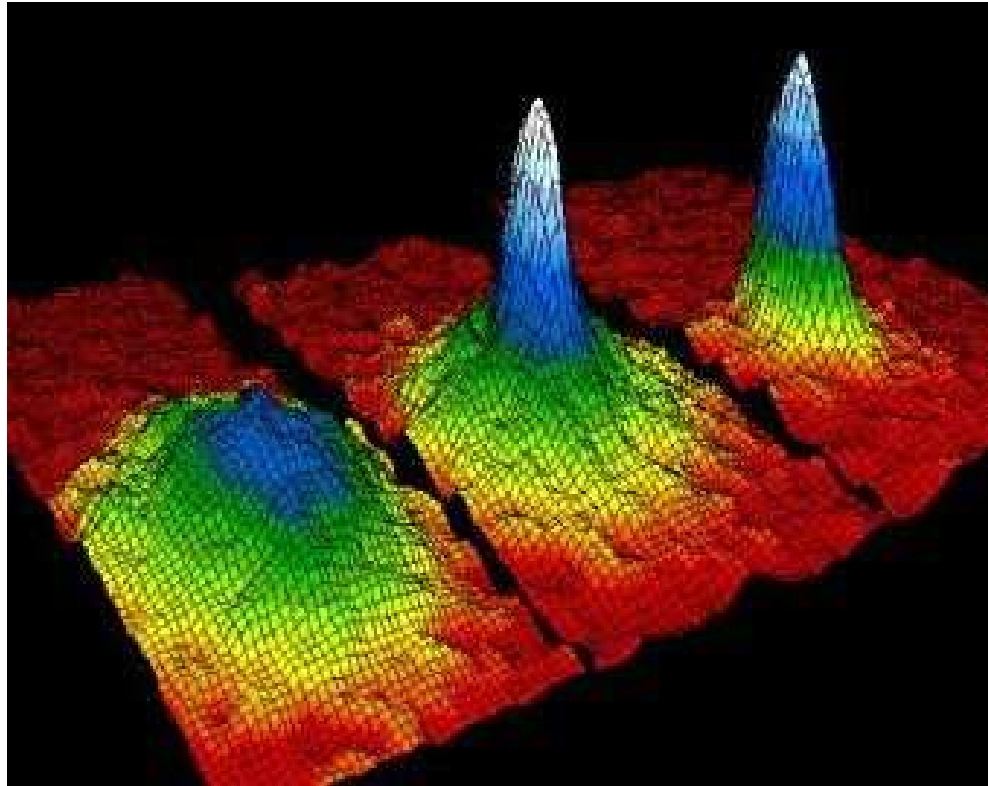
# ***Rzadkie gazy bozonów***

***Tomasz Sowiński***

***Proseminarium Fizyki Teoretycznej***

***15 listopada 2004***

# Bardzo medialne zdjęcie



Rok 1995. Pierwsza kondensacja. Zaobserwowana w przestrzeni pędów.

Eksperyment grupy prof. Andersona dla atomów rubidu ( $^{87}\text{Rb}$ ). [*Science* **269**, 198 (1995)]

# Plan

- Opis układu wielu cząstek
- Doskonałe gazy bozonów
  - Swobodne
  - w pułapce harmoniczej
- Bozony oddziałujące w pułapce harmoniczej
- Krótkie podsumowanie

# Układ wielu cząstek

- Aby opisywać układ wielu atomów trzeba podać:

- Hamiltonian układu

$$\mathcal{H} = \sum_i \left( \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_i \sum_j V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

- Dodatkowe reguły (np. zakaz Pauliego dla fermionów)
- Aby przewidzieć jakieś doświadczenia trzeba stosować uproszczenia
  - zajmować się tylko stanami stacjonarnymi
  - pominąć oddziaływanie pomiędzy atomami
  - pominąć wszystko bez swobodnej dynamiki
  - **Nie pomijać „dodatkowych reguł”!!**

# Opis układu bozonów

- Doświadczalnie łatwo jest utrzymać temperaturę i objętość układu. Dość trudno stałą liczbę cząstek
- Stosujemy **zespół wielki kanoniczny**  $(T, V, \mu)$
- średnie obsadzenie stanu:

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

- Całkowita liczba cząstek i całkowita energia

$$N = \sum_k n_k \quad E = \sum_k \epsilon_k n_k$$

- Potencjał chemiczny bozonów:  $\mu \in (-\infty, 0)$ .

# *Swobodny gaz doskonały*

# Swobodny gaz bozonów

- Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$$

- Nieunormowane stany własne - problem z sumowaniem
  - Stany własne  $\mathcal{H}$  są stanami własnymi pędu
  - Bedziemy sumować „po pędach”

$$\sum_k = g \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow g \left( \frac{L}{h} \right)^d \int d^d \mathbf{p}$$

- Energia w funkcji pędu

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$$

# Swobodny gaz bozonów

- Całkowita liczba cząstek

$$\begin{aligned} N &= \sum_k n_k \rightarrow \frac{gV}{h^3} \int n(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{gV}{h^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\right] - 1} \\ &= \frac{2^{5/2} \pi gV m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} - 1} \end{aligned}$$

# Swobodny gaz bozonów

- Całkowita liczba cząstek

$$\begin{aligned} N &= \sum_k n_k \rightarrow \frac{gV}{h^3} \int n(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{gV}{h^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\right] - 1} \\ &= \frac{2^{5/2} \pi gV m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} - 1} \end{aligned}$$

- I ten wynik powinien nas martwić!

# Swobodny gaz bozonów

- Dlaczego?

$$N = \frac{2^{5/2} \pi g V m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} - 1}$$

- dla  $\mu \rightarrow -\infty$  mamy  $N \rightarrow 0$
- dla  $\mu = 0$  można wyliczyć:  $N \sim VT^{3/2}$

# Swobodny gaz bozonów

## • Dlaczego?

$$N = \frac{2^{5/2} \pi g V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} - 1}$$

• dla  $\mu \rightarrow -\infty$  mamy  $N \rightarrow 0$

• dla  $\mu = 0$  można wyliczyć:  $N \sim VT^{3/2}$

## • Wniosek

Największa liczba bozonów jaka może się pomieścić w naczyniu o objętości  $V$  jest skończona i proporcjonalna do  $T^{3/2}$ . W szczególności **w granicy  $T \rightarrow 0$  liczba bozonów wynosi 0**. Jest to sprzeczne z naturą bozonów, które mogą obsadzać dowolny stan w dowolnej ilości.

# Swobodny gaz bozonów

- Prawidłowe rozumowanie

$$N - N_0 = \frac{2^{5/2} \pi g V m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} e^{-\beta\mu} - 1}$$

dla  $\mu = 0$  i  $T \rightarrow 0$  mamy  $N - N_0 \rightarrow 0$  co oznacza tylko tyle, że w wszystkie bozony są w stanie podstawowym!

- Kondensacja Bosego-Einsteina

- temperatura krytyczna  $T_0$

$$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \frac{n^{2/3}}{(2\zeta(\frac{3}{2}))^{2/3}}$$

# Swobodny gaz bozonów

- dla  $T > T_0$  gaz zachowuje się jak typowy gaz doskonały z niewielkimi poprawkami kwantowymi

# Swobodny gaz bozonów

- dla  $T > T_0$  gaz zachowuje się jak typowy gaz doskonały z niewielkimi poprawkami kwantowymi
- dla  $T < T_0$ 
  - makroskopowe obsadzenie stanu podstawowego

$$N_0 = N \left( 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

- potencjał chemiczny  $\mu = 0$

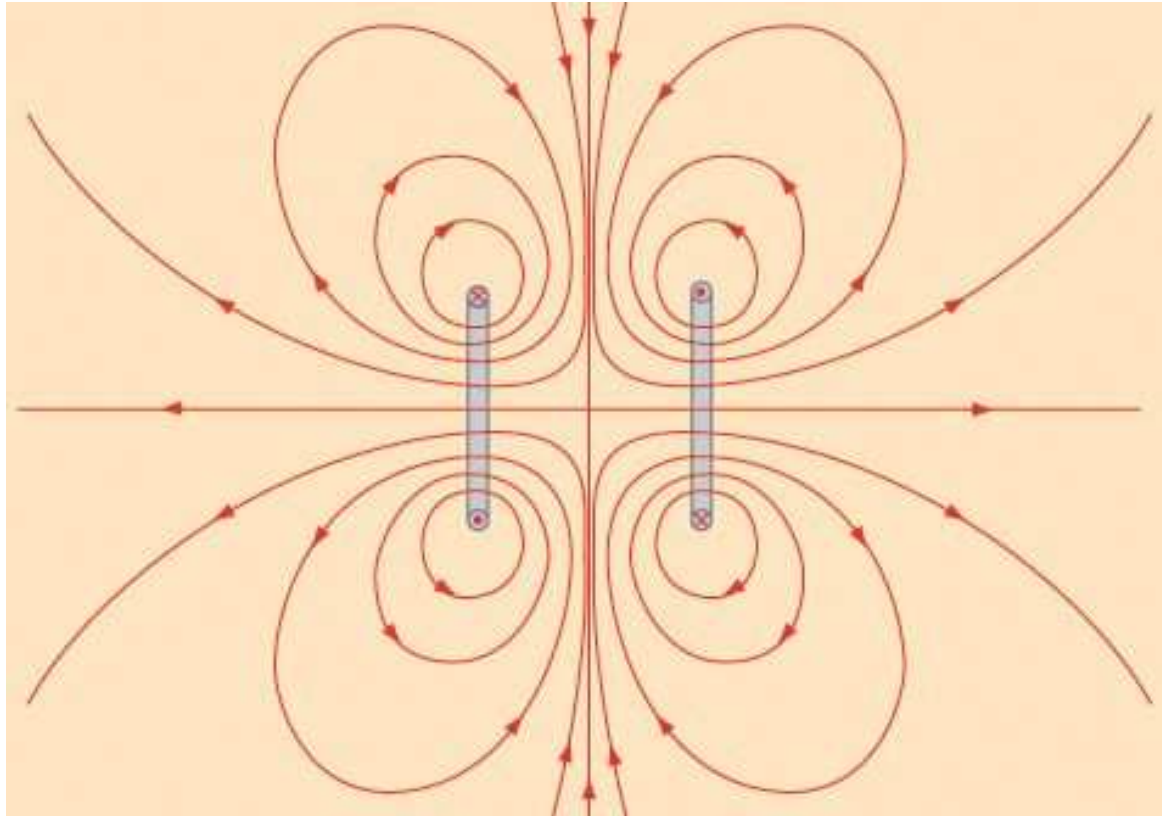
To oznacza m.in., że dokładanie kolejnych atomów do kondensatu nie kosztuje energii

# ***Gaz doskonały w pułapce***

# Realia doświadczalne



# Realia doświadczalne



## Cewka Helmholtza

Energia oddziaływania momentu magnetycznego z polem:  $U(\mathbf{r}) \sim \mathbf{r} \hat{V} \mathbf{r}$

# Nieoddziałujące atomy w pułapce

- hamiltonian się rozpada na sumę

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_i \quad \mathcal{H}_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i)$$

- Pułapki magnetyczne atomów alkalicznych są prawie jak pułapki harmoniczne

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

- Wartości własne hamiltonianu swobodnego:

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega_x + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega_y + (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z$$

# Nieoddziałujące atomy w pułapce

- Stan podstawowy jest iloczynowy

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i \varphi(\mathbf{r}_i)$$

$$\varphi(\mathbf{r}_i) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right)$$

- rozkład gęstości  $N$  bozonów:

$$n(\mathbf{r}) = N |\varphi(\mathbf{r})|^2$$

- rozmiary chmury bozonowej

$$a_{ht} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

$$a_{\text{eksperyment}} \approx 1\mu m$$

# Nieoddziałujące atomy w pułapce

- Całkowita liczba cząstek układu

$$N = g \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)] - 1}$$

- Wydzielamy obsadzenie stanu podstawowego

$$N - N_0 = g \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)] - 1}$$

- I zamieniamy na całkowanie (musi być  $k_B T \gg \hbar\Omega$ )

$$N - N_0 = g \int_0^\infty \frac{dn_x dn_y dn_z}{\exp[\beta\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z - \mu)] - 1}$$

# Nieoddziałujące atomy w pułapce

- Kondensacja atomów w pułapce

$$N - N_0 = \zeta(3) \left( \frac{k_B T}{\hbar \Omega} \right)^3 \quad \Omega = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$$

- temperatura krytyczna

gdy  $T \rightarrow T_0$  to obsadzenie makroskopowe stanu podstawowego znika  $N_0 \rightarrow 0$

$$k_B T_0 = \hbar \Omega \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.94 \hbar \Omega N^{1/3}$$

- Nowa granica termodynamiczna

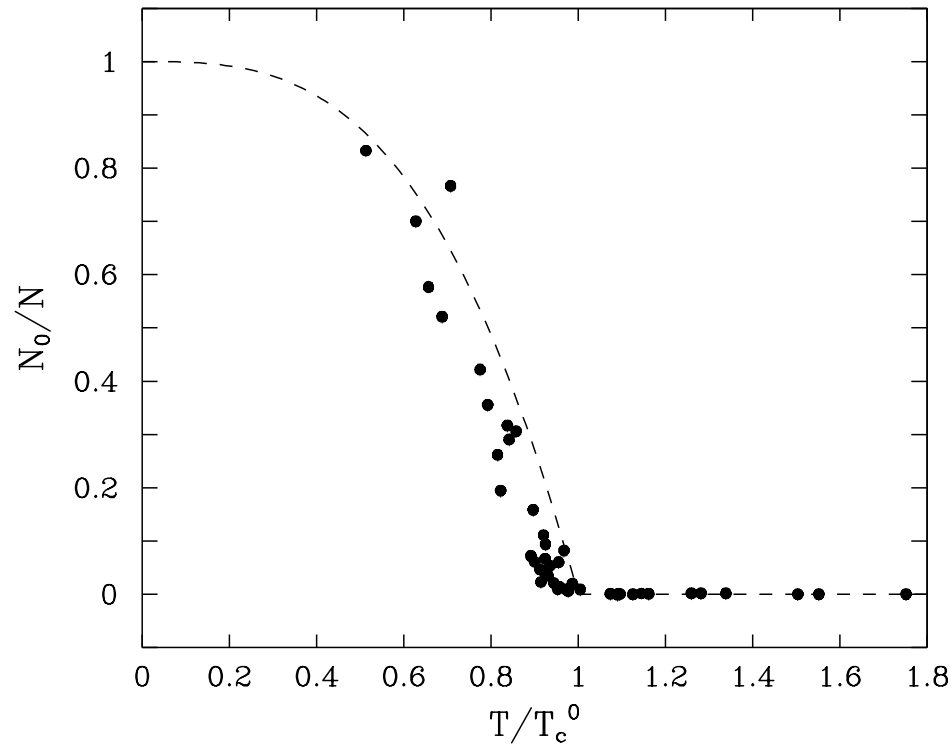
$N \rightarrow \infty$  oraz  $\Omega \rightarrow 0$  tak że  $N \Omega^3 = \text{const.}$

$$N_0 = N \left( 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 \right)$$

# Małe porównanie

Wielkość	Gaz swobodny	Gaz w pułapce
Temp. krytyczna	$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \frac{N^{2/3}}{(2V\zeta(\frac{3}{2}))^{2/3}}$	$T_0 = \frac{\hbar\Omega}{k_B} \left( \frac{N^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}} \right)$
Obsadz. stanu podst.	$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2}$	$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^3$
Energia układu	$\frac{E}{Nk_B T_0} = \frac{3\zeta(5/2)}{2\zeta(3/2)} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{5/2}$	$\frac{E}{Nk_B T_0} = \frac{3\zeta(4)}{\zeta(3)} \left( \frac{T}{T_0} \right)^4$
Granica termodyn.	$\frac{N}{V} = \text{const}$	$N\Omega^3 = \text{const}$
Kondensacja	$D > 2$	$D > 1$

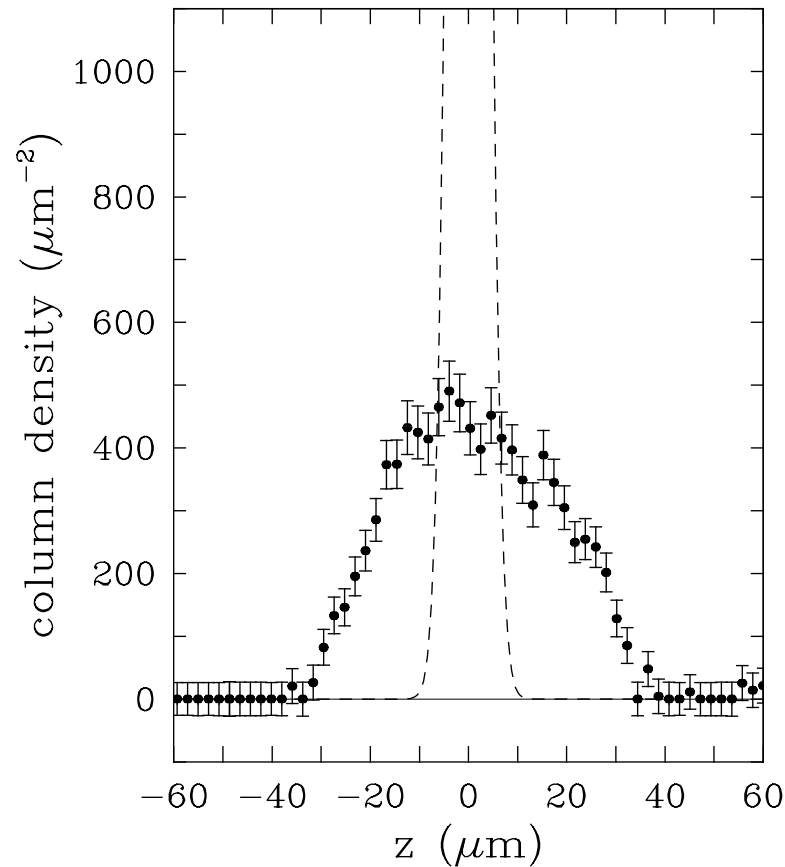
# Eksperyment vs. teoria



Ułamek atomów kondensujących w funkcji temperatury dla układu w pułapce harmonicznej.

Eksperyment grupy prof. Enshera dla **40 tyś.** atomów. [*Phys. Rev. Lett.* **77**, 4984 (1996)]

# Eksperyment vs. teoria



Gęstość kolumnowa dla **80 tyś.** atomów sodu ( $^{23}\text{Na}$ ).

Eksperyment grupy prof. Hau z 1998 roku. [*Phys. Rev. A* **58**, R54 (1998)]

Linia przerywana - przewidywania teoretyczne dla nieoddziałujących atomów w pułapce.

# ***Gaz rzeczywisty***

***teoria pola średniego***

# Układ oddziałujących bozonów

- hamiltonian układu w języku drugiej kwantyzacji

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) + \\ &+ \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

- Ewolucja operatorów pola

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r}, t) &= [\Psi, \hat{\mathcal{H}}] = \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}', t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

# Równanie Grossa-Pitaevskiego

- Przybliżenie oddziaływania punktowego

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2\sigma}{m}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

Takie przybliżenie oznacza, że gaz musi być bardzo rzadki i wtedy operator pola możemy zastąpić przez klasyczne pole.

- Równanie na ewolucje bardzo się upraszcza

$$i\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \lambda |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t)$$

# Czy to ma sens??

- Gaz powinien być rzadki, tzn.

$$\bar{n}|\sigma|^3 \ll 1$$

$\sigma$  - parametr zderzenia,  $\bar{n}$  - średnia gęstość gazu

# Czy to ma sens??

- Gaz powinien być rzadki, tzn.

$$\bar{n}|\sigma|^3 \ll 1$$

$\sigma$  - parametr zderzenia,  $\bar{n}$  - średnia gęstość gazu

- Dane doświadczalne

Co?	Kto?	Kiedy?	$\sigma$ [nm]
$^{23}\text{Na}$	Tiesinga	1996	2.75
$^{87}\text{Rb}$	Boesten	1997	5.77
$^7\text{Li}$	Abraham	1995	-1.45

Gęstości są w przedziale  $10^{13} - 10^{15}\text{cm}^{-3}$  co oznacza,

że  $\bar{n}|\sigma|^3$  jest mniejsze niż  $10^{-3}$ .

# Zasada wariacyjjna

- Zasada wariacyjjna dla Równania G-P

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta E}{\delta \Phi^*}$$

- Funkcjonał energii

$$E[\Phi] = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4 \right]$$

Jest to zatem kwantowa wersja teorii „ $\phi^4$ ”.

# Stan stacjonarny

- Równanie Grossa-Pitaevskiego

$$i\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \lambda |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t)$$

- Rozwiązania szukamy w postaci:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \exp(-i\mu t/\hbar)$$

- Równanie stacjonarne

$$\left( -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \lambda |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r})$$

# Stan stacjonarny

- Parametry bezwymiarowe

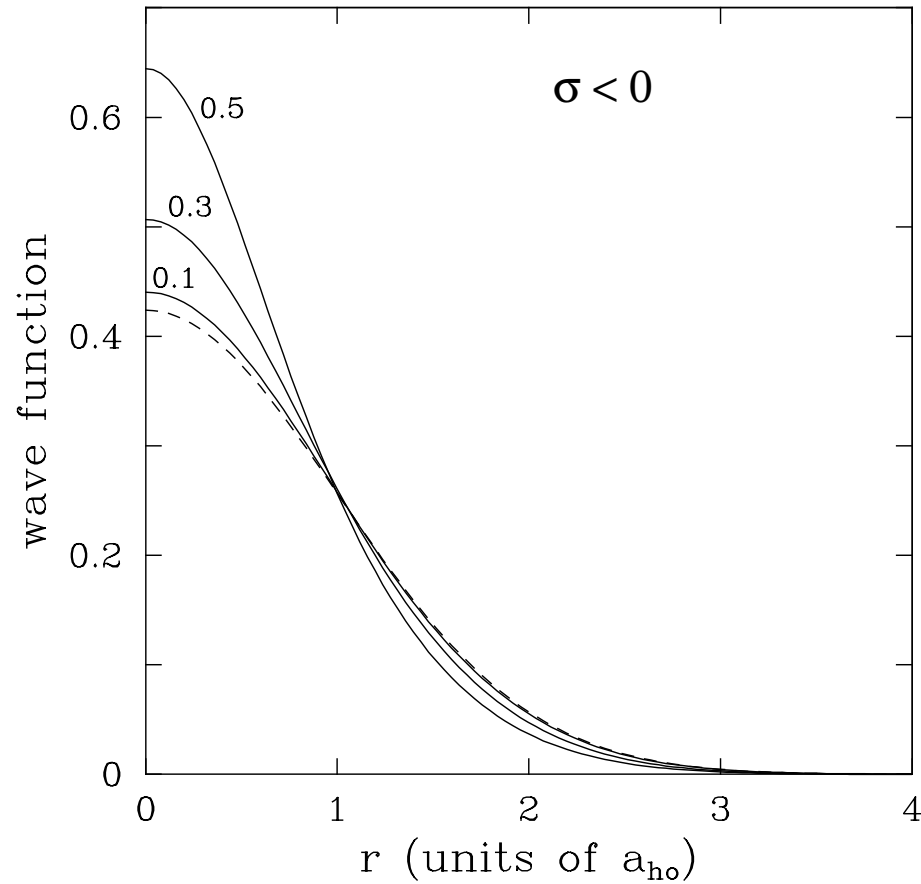
$$\begin{aligned} a &\rightarrow \text{jednostka długości} \\ a^{-3} &\rightarrow \text{jednostka gęstości} \\ \hbar\Omega &\rightarrow \text{jednostka energii} \end{aligned}$$

- Równanie G-P w tych jednostkach

$$\left[ -\tilde{\nabla}^2 + \tilde{r}^2 + 8\pi \frac{N\sigma}{a} \tilde{\phi}^2(\tilde{\mathbf{r}}) \right] \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{r}}) = 2\tilde{\mu}\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{r}})$$

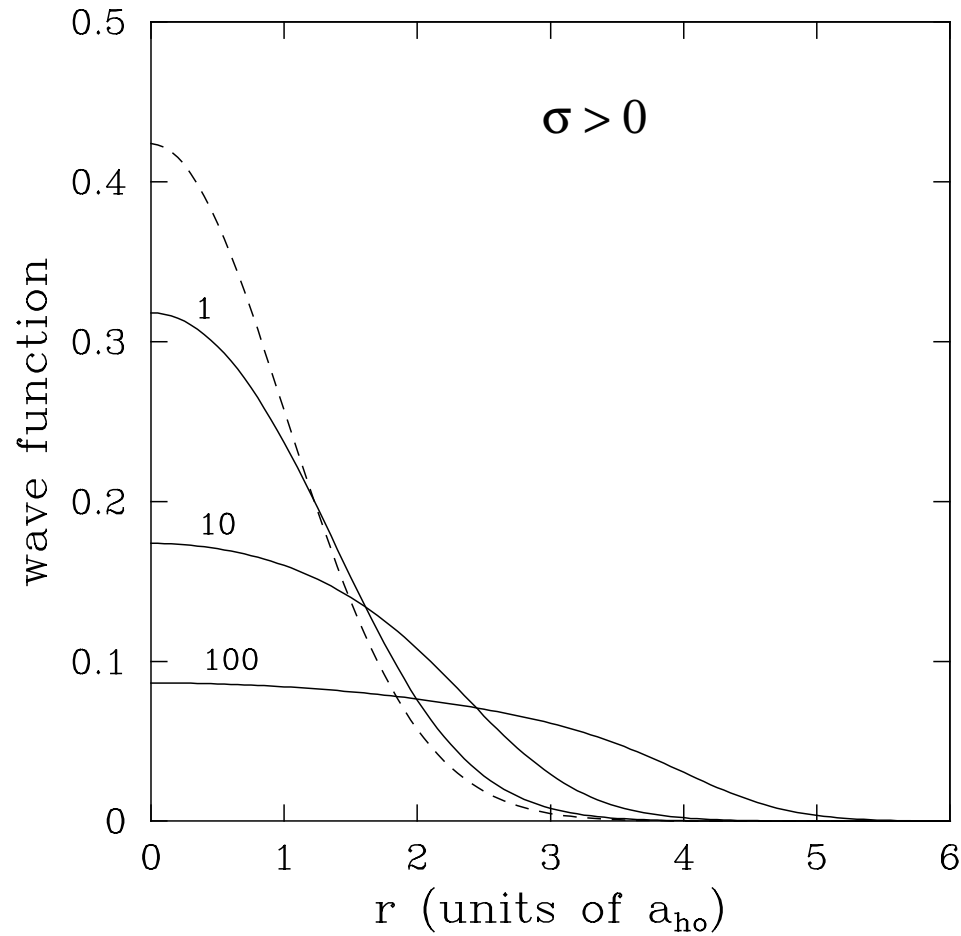
- Kluczowy jest parametr bezywmiarowy  $\frac{N\sigma}{a}$

# Rozwiązania numeryczne



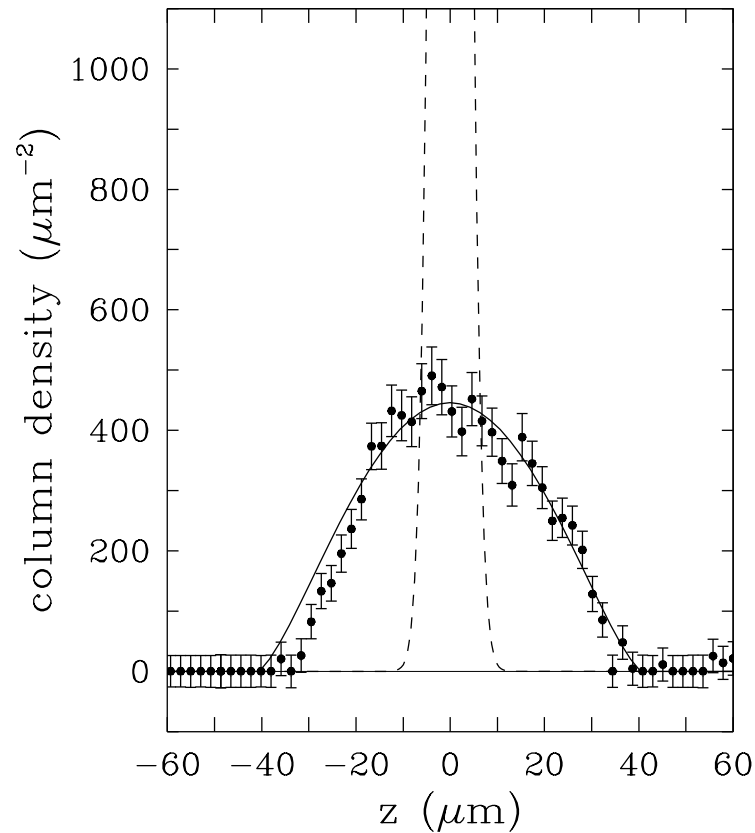
Rozwiązanie GPE dla sił przyciągających

# Rozwiązania numeryczne



Rozwiązanie GPE dla sił **odpychających**

# Rozwiązania numeryczne



Gęstość kolumnowa dla 80 tyś. atomów sodu ( $^{23}\text{Na}$ ).

Linia ciągła - rozwiązanie numeryczne GPE!

# Podsumowanie

- Kondensacja Bosego-Einsteina **jest obserwowalna** doświadczalnie
- **Opis jakościowy** możliwy jest przy pominięciu wzajemnego oddziaływania
- **W analizie ilościowej** nie można pominąć oddziaływania atom-atom gdyż prowadzi to wniosków sprzecznych z doświadczeniem
- Bardzo **prostą i dobrą analizę** można przeprowadzić metodą pola średniego wprowadzając tzw. **równanie Grossa-Pitaevskiego**
- Równanie Grossa-Pitaevskiego pozwala również bardzo dobrze opisywać dynamikę kondensatu, a nie tylko stany stacjonarne