

Funkcje falowe układów liniowych

Tomasz Sowiński



23 lutego 2005



Hamiltonian układu liniowego



DEF. **UKŁAD LINIOWY** - układ hamiltonowski, którego kanoniczne równania ruchu są liniowe o stałych współczynnikach (ew. niejednorodne)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi} \cdot \hat{T} \cdot \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{Q} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{m}{2} \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{G} \cdot \boldsymbol{\rho} + m \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{m} \mathbf{h}(t) \cdot \boldsymbol{\pi}$$

Hamiltonian układu liniowego



DEF. UKŁAD LINIOWY - układ hamiltonowski, którego kanoniczne równania ruchu są liniowe o stałych współczynnikach (ew. niejednorodne)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi} \cdot \hat{T} \cdot \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{Q} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{m}{2} \boldsymbol{\rho} \cdot \hat{G} \cdot \boldsymbol{\rho} + m \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{m} \mathbf{h}(t) \cdot \boldsymbol{\pi}$$

Macierz \hat{T} jest dodatniookreślona. Istnieje zatem taka macierz \hat{O} , że zachodzi:

$$\hat{O}^T \cdot \hat{T} \cdot \hat{O} = \hat{I}$$

- Wykonujemy transformację kanoniczną

$$\boldsymbol{\pi}' = \hat{O}^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi} \quad \boldsymbol{\rho}' = \hat{O}^T \cdot \boldsymbol{\rho}$$

Hamiltonian układu liniowego



- Hamiltonian w nowych zmiennych

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi}'^2 + \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{W} \cdot \boldsymbol{\pi}' + \frac{m}{2} \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{U} \cdot \boldsymbol{\rho}' + m \mathbf{f}'(t) \cdot \boldsymbol{\rho}' + \frac{1}{m} \mathbf{h}'(t) \cdot \boldsymbol{\pi}'$$

Hamiltonian układu liniowego



- Hamiltonian w nowych zmiennych

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi}'^2 + \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{W} \cdot \boldsymbol{\pi}' + \frac{m}{2} \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{U} \cdot \boldsymbol{\rho}' + m \mathbf{f}'(t) \cdot \boldsymbol{\rho}' + \frac{1}{m} \mathbf{h}'(t) \cdot \boldsymbol{\pi}'$$

- Kolejną transformacją kanoniczną usuwamy jedną niejednorodność

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}' \quad \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}' + \mathbf{h}'(t)$$

- to prowadzi do hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \mathbf{R} \cdot \hat{W} \cdot \mathbf{P} + \frac{m}{2} \mathbf{R} \cdot \hat{U} \cdot \mathbf{R} + m \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{R} - \frac{\mathbf{h}'^2}{2m}$$

Hamiltonian układu liniowego



- Hamiltonian w nowych zmiennych

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\pi}'^2 + \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{W} \cdot \boldsymbol{\pi}' + \frac{m}{2} \boldsymbol{\rho}' \cdot \hat{U} \cdot \boldsymbol{\rho}' + m \mathbf{f}'(t) \cdot \boldsymbol{\rho}' + \frac{1}{m} \mathbf{h}'(t) \cdot \boldsymbol{\pi}'$$

- Kolejną transformacją kanoniczną usuwamy jedną niejednorodność

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}' \quad \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}' + \mathbf{h}'(t)$$

- to prowadzi do hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \mathbf{R} \cdot \hat{W} \cdot \mathbf{P} + \frac{m}{2} \mathbf{R} \cdot \hat{U} \cdot \mathbf{R} + m \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{R} - \frac{\mathbf{h}'^2}{2m}$$

Hamiltonian układu liniowego



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \mathbf{R} \cdot \hat{W} \cdot \mathbf{P} + \frac{m}{2} \mathbf{R} \cdot \hat{U} \cdot \mathbf{R} + mg(t) \cdot \mathbf{R} - \frac{\hbar^2}{2m}$$

Hamiltonian układu liniowego



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \mathbf{R} \cdot \hat{W} \cdot \mathbf{P} + \frac{m}{2} \mathbf{R} \cdot \hat{U} \cdot \mathbf{R} + mg(t) \cdot \mathbf{R} - \cancel{\frac{\hbar^2}{2m}}$$

Dzielimy człon mieszany na symetryczny i antysymetryczny:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2} (\hat{W} - \hat{W}^T) \quad \hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{W} + \hat{W}^T)$$

- Wykonujemy transformację kanoniczną

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} + m\hat{S} \cdot \mathbf{R}$$

- Otrzymujemy hamiltonian

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + mg(t) \cdot \mathbf{r}$$

$$\hat{V} = \hat{U} - \hat{S}^2 - [\hat{\Omega}, \hat{S}]$$

Klasyczna analiza ruchu



$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Równania ruchu

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)$$

- Rozwiązania równania jednorodnego poszukujemy w postaci modów własnych

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_0 e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0 e^{i\omega t}$$

Klasyczna analiza ruchu



- Amplituda danego modu musi spełniać równanie własne:

$$\begin{pmatrix} -\hat{\Omega} - i\omega & \frac{1}{m} \\ -m\hat{V} & -\hat{\Omega} - i\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{P}_0 \end{pmatrix} = 0$$

- częstość własna jest miejscem zerowym wielomianu charakterystycznego

$$\omega^{2n} + A_{2n-1}\omega^{2n-1} + A_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + A_2\omega^2 + A_1\omega + A_0 = 0$$

Klasyczna analiza ruchu



- Amplituda danego modu musi spełniać równanie własne:

$$\begin{pmatrix} -\hat{\Omega} - i\omega & \frac{1}{m} \\ -m\hat{V} & -\hat{\Omega} - i\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{P}_0 \end{pmatrix} = 0$$

- częstość własna jest miejscem zerowym wielomianu charakterystycznego

$$\omega^{2n} + \cancel{A_{2n-1}\omega^{2n-1}} + A_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + A_2\omega^2 + \cancel{A_1\omega} + A_0 = 0$$

- można pokazać, że wyrazy nieparzyste nie występują!
- częstości własne zawsze są parami: $\pm\omega$.

Dynamika kwantowa



- Hamiltonian kwantowy

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \nabla + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- na początek badamy ewolucję paczki gaussowskiej

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = N(t) e^{\frac{i}{\hbar} \phi(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \cdot \hat{K}(t) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] + \frac{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}(t)}{\hbar} \right\}$$

- Średnie położenie i pęd

$$\langle \check{\mathbf{r}} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$$

$$\langle \check{\mathbf{p}} \rangle = \frac{\hbar}{i} \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \mathbf{P}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki



- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki



- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki



- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki



- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

Ewolucja kształtu paczki



- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki



- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left(\frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

Ewolucja kształtu paczki



- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left(\frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

Ewolucja kształtu paczki



- Po uporządkowaniu równania mają postać:

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{1}{m}\hat{N} - \hat{\Omega} \cdot \hat{D}$$

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \hat{D} - \hat{\Omega} \cdot \hat{N}$$

- Przypomnijmy klasyczne równania ruchu:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)$$

- Kolumny \hat{N} i \hat{D} spełniają klasyczne równania ruchu!
- Kształt paczki nie czuje zewnętrznego pola!

Przykład 1D



- Jednowymiarowy oscylator (bezwymiarowo):

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right] \psi(\xi, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\xi, \tau)$$

- Zbadamy ewolucję paczki gaussowskiej:

$$\psi(\xi, \tau) = N(\tau) e^{-\alpha(\tau) \xi^2 / 2}, \quad \alpha(0) = 2$$

Przykład 1D



- Jednowymiarowy oscylator (bezwymiarowo):

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right] \psi(\xi, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\xi, \tau)$$

- Zbadamy ewolucję paczki gaussowskiej:

$$\psi(\xi, \tau) = N(\tau) e^{-\alpha(\tau) \xi^2 / 2}, \quad \alpha(0) = 2$$

- Rozwiązanie: $\alpha(\tau) = -i \frac{n(\tau)}{d(\tau)}$

- warunek początkowy: $n(0) = -2, \quad d(0) = i$

- i rozwiązujemy:

$$\begin{cases} \dot{d} = n \\ \dot{n} = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(\tau) = -2 \sin(\tau) + i \cos(\tau) \\ n(\tau) = -2 \cos(\tau) - i \sin(\tau) \end{cases}$$

Generyczny stan stacjonarny



- Jeszcze raz ewolucja kształtu:

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

- Aby kształt nie zależał od czasu wystarczy, aby:

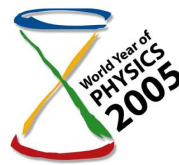
$$\begin{aligned} \hat{D}(t) &= \hat{D}_0 \cdot e^{i\hat{\omega}t} \\ \hat{N}(t) &= \hat{N}_0 \cdot e^{i\hat{\omega}t} \end{aligned} \Rightarrow \hat{K}_0 = -\frac{i}{m}\hat{N}_0 \cdot \hat{D}_0^{-1}$$

- Pamiętajmy, że klasyczne mody spełniają taki warunek:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

- Znając zatem klasyczne amplitudy można zbudować kształt paczki falowej

Konstrukcja stanu generycznego



- Układ posiada $2n$ modów własnych o częstościach:

$$\pm\omega_1 \quad \pm\omega_2 \quad \dots \quad \pm\omega_{n-1} \quad \pm\omega_n$$

- Potrzebujemy n modów do konstrukcji macierzy \hat{N}_0 i \hat{D}_0
- Które mody należy wybrać?

Konstrukcja stanu generycznego



- Układ posiada $2n$ modów własnych o częstościach:

$$\pm\omega_1 \quad \pm\omega_2 \quad \dots \quad \pm\omega_{n-1} \quad \pm\omega_n$$

- Potrzebujemy n modów do konstrukcji macierzy \hat{N}_0 i \hat{D}_0

- Które mody należy wybrać?

- Należy wybrać te mody, które zapewnią $\text{Re}\hat{K}_0 > 0$
- Istnieje tylko jedna taka kombinacja!
- Z każdej pary o określonej częstości jest wybrany dokładnie jeden mod

- Wynika to z postaci hamiltonianu po całkowitym rozseparowaniu

$$\mathcal{H} = \pm \omega_1 A_1^* A_1 \pm \omega_2 A_2^* A_2 \pm \dots \pm \omega_n A_n^* A_n$$

Inne stany stacjonarne



- Aby znaleźć inne stany stacjonarne zbadajmy ewolucję funkcji:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = N e^{\frac{i}{\hbar} \phi(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \cdot \hat{K}_0 \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] + \frac{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}(t)}{\hbar} \right\}$$

- teraz kształt \hat{K}_0 nie zmienia się w czasie
- Średnie położenie i pęd spełniają klasyczne równania

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{\mathbf{P}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R} \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{R} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

- Wybierzmy mod o częstości $-\omega_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \kappa^{-1} \mathbf{R}_0 e^{-i\omega_0 t} \\ \mathbf{P}(t) &= \kappa^{-1} \mathbf{P}_0 e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Inne stany stacjonarne



- Funkcję falową można zapisać w postaci:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = M e^{i\Omega_0 t} e^{-\beta e^{-2i\omega_0 t} + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

- gdzie parametry mają postać:

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2\hbar} \text{Tr}(\text{Re} \hat{K}_0)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\kappa\hbar} \left[m \hat{K}_0 \cdot \mathbf{R}_0 + i \mathbf{P}_0 \right]$$

$$\beta = \frac{1}{4\hbar\kappa^2\omega_0} \left[m \mathbf{R}_0 \cdot \left(\hat{V} + 2\omega_0 \hat{K}_0 \right) \cdot \mathbf{R}_0 - \frac{\mathbf{P}_0^2}{m} \right]$$

- wybierając odpowiednio κ możemy dostać: $\beta = 1$.
 κ było dowolne.

Inne stany stacjonarne



$$\Psi(\mathbf{r}, t) = M e^{i\Omega_0 t} e^{-e^{-2i\omega_0 t} + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

- Przypomnienie: funkcja tworząca wielomiany Hermitte'a

$$e^{-z^2 + 2\xi z} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{z^n}{n!}$$

- Nasza funkcję falową można rozłożyć:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = M e^{i\Omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}} e^{-in\omega_0 t}$$

Inne stany stacjonarne



$$\Psi(\mathbf{r}, t) = M e^{i\Omega_0 t} e^{-e^{-2i\omega_0 t} + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

- Przypomnienie: funkcja tworząca wielomiany Hermitte'a

$$e^{-z^2 + 2\xi z} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{z^n}{n!}$$

- Nasza funkcję falową można rozłożyć:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = M e^{i\Omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}} e^{-in\omega_0 t}$$

- funkcją własną hamiltonianu jest:

$$\begin{aligned} \Psi_n(\mathbf{r}, t) &= A_n H_n(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}} \\ E_n &= n\hbar\omega_0 + \hbar\Omega_0 \end{aligned}$$

Podsumowanie



- W przypadku układów liniowych istnieje bezpośredni związek między dynamiką klasyczną, a kwantową
- Cała dynamika paczki gaussowskiej (również jej kształt) jest zawarta w klasycznych trajektoriach
- Znajomość klasycznych rozwiązań równań ruchu pozwala skonstruować stany stacjonarne
- Można zbudować zupełny układ stanów własnych dowolnego układu liniowego w dowolnej liczbie wymiarów