

# ***Dynamika w wirującej pułapce harmoniczej klasycznie i kwantowo***

***Tomasz Sowiński  
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN***

***Kraków, 8 maja 2006***



# Klasyczna analiza ruchu

- Hamiltonian układu

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V}(t) \cdot \mathbf{r}$$

# Klasyczna analiza ruchu

- Hamiltonian układu

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Hamiltonian w układzie wirującym

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r}$$

# Klasyczna analiza ruchu

- Hamiltonian układu

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Hamiltonian w układzie wirującym

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r}$$

- Równania ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

# Klasyczna analiza ruchu

- Równanie własne na amplitudę modu:

$$\begin{pmatrix} -\hat{\Omega} - i\omega_k & \frac{1}{m} \\ -m\hat{V} & -\hat{\Omega} - i\omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_0^{(k)} \\ P_0^{(k)} \end{pmatrix} = 0$$

- Rozwiązania konstruujemy z modów własnych:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k \begin{pmatrix} R_0^{(k)} \\ P_0^{(k)} \end{pmatrix} e^{i\omega_k t}$$

# Klasyczna analiza ruchu

- Równanie własne na amplitudę modu:

$$\begin{pmatrix} -\hat{\Omega} - i\omega_k & \frac{1}{m} \\ -m\hat{V} & -\hat{\Omega} - i\omega_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_0^{(k)} \\ P_0^{(k)} \end{pmatrix} = 0$$

- Rozwiązania konstruujemy z modów własnych:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k \begin{pmatrix} R_0^{(k)} \\ P_0^{(k)} \end{pmatrix} e^{i\omega_k t}$$

- równanie na częstości własne

$$\omega^6 + A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

- częstości własne zawsze występują parami:  $\pm\omega$ .

# Częstości własne, a stabilność układu

- Równanie na częstości własne ( $\Omega = \Omega \mathbf{n}$ )

$$\chi^3 + A \chi^2 + B \chi + C = 0 \quad (\omega^2 = \chi)$$

$$A = -2\Omega^2 - \text{Tr}(\hat{V})$$

$$B = \Omega^4 + \Omega^2 \left[ 3\mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} - \text{Tr}(\hat{V}) \right] + \frac{\text{Tr}(\hat{V})^2 - \text{Tr}(\hat{V}^2)}{2}$$

$$C = -\Omega^4 \mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} + \Omega^2 \left[ \text{Tr}(\hat{V}) \mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \hat{V}^2 \cdot \mathbf{n} \right] - \text{Det}(\hat{V})$$

# Częstości własne, a stabilność układu

- Równanie na częstości własne ( $\Omega = \Omega n$ )

$$\chi^3 + A \chi^2 + B \chi + C = 0 \quad (\omega^2 = \chi)$$

$$A = -2\Omega^2 - \text{Tr}(\hat{V})$$

$$B = \Omega^4 + \Omega^2 \left[ 3\mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} - \text{Tr}(\hat{V}) \right] + \frac{\text{Tr}(\hat{V})^2 - \text{Tr}(\hat{V}^2)}{2}$$

$$C = -\Omega^4 \mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} + \Omega^2 \left[ \text{Tr}(\hat{V}) \mathbf{n} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \hat{V}^2 \cdot \mathbf{n} \right] - \text{Det}(\hat{V})$$

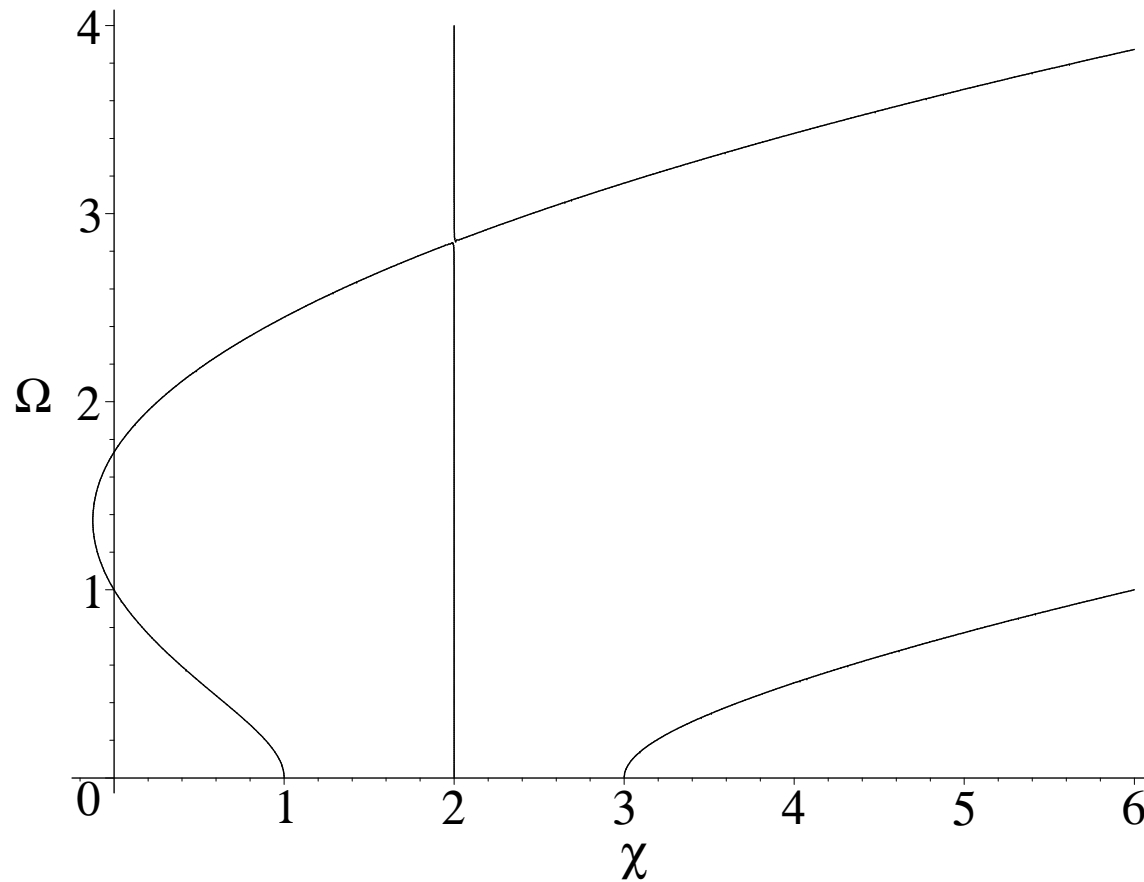
- Dla ustalonego  $\hat{V}$  i  $\mathbf{n}$  otrzymujemy równanie krzywej

$$f(\chi, \Omega) = \chi^3 + A(\Omega) \chi^2 + B(\Omega) \chi + C(\Omega) = 0$$

# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 1, V_y = 3, V_z = 2$$

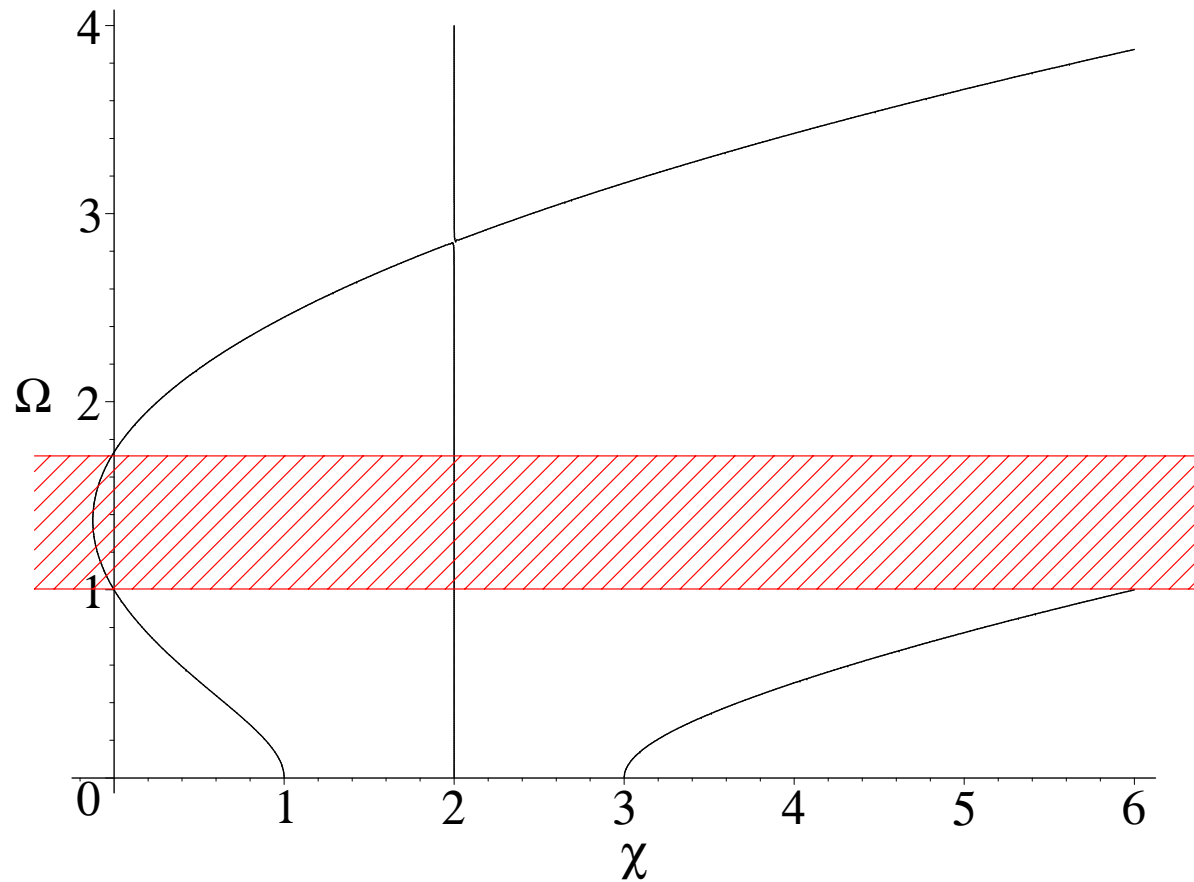
$$\Omega = (0, 0, \Omega)$$



# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 1, V_y = 3, V_z = 2$$

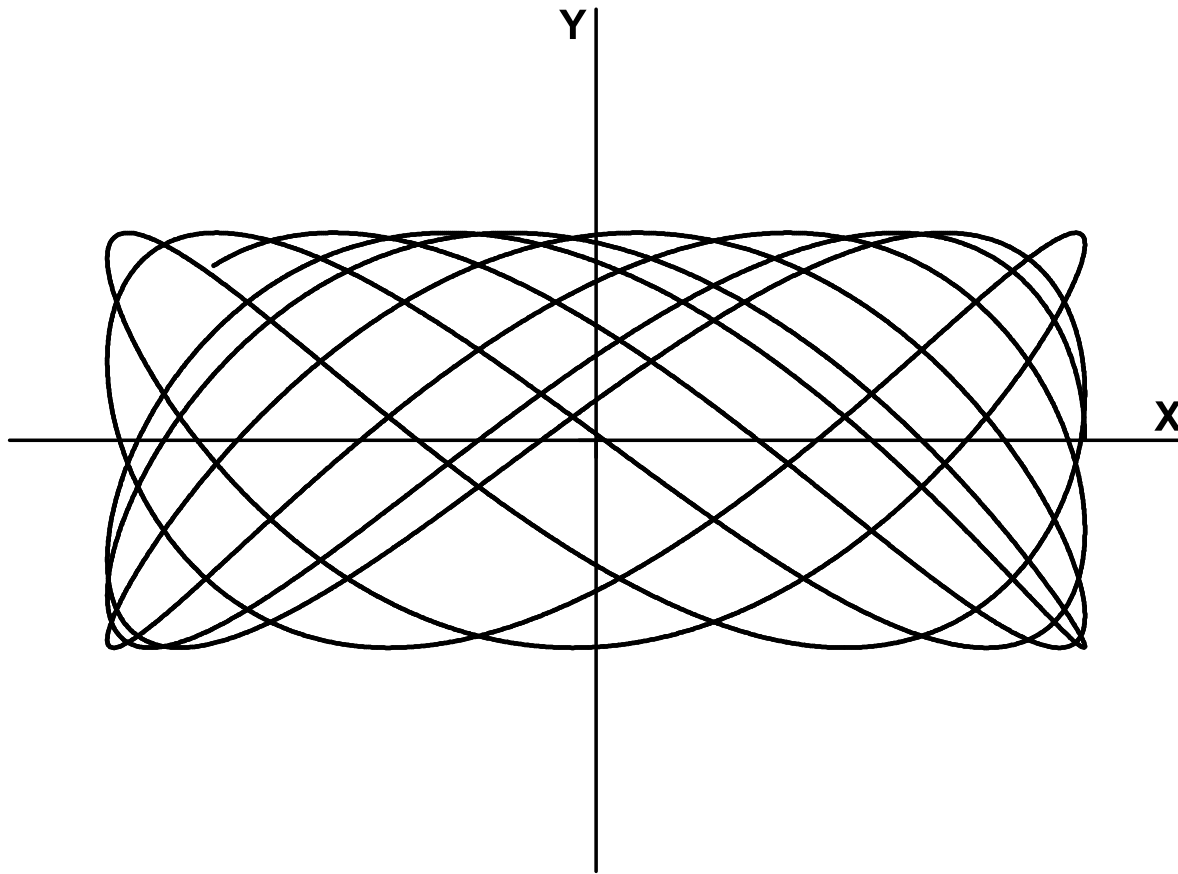
$$\Omega = (0, 0, \Omega)$$



# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 1$$

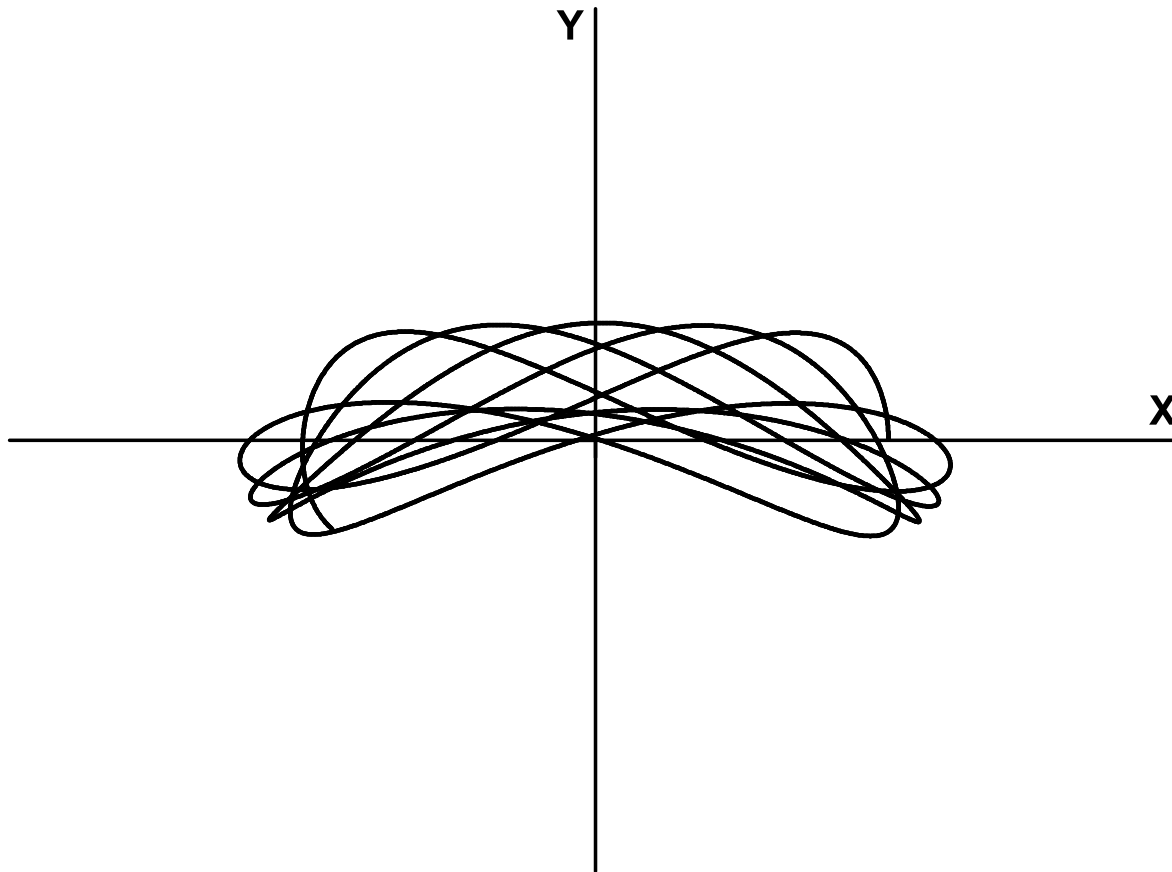
Potencjał nieobrcający się



# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 1$$

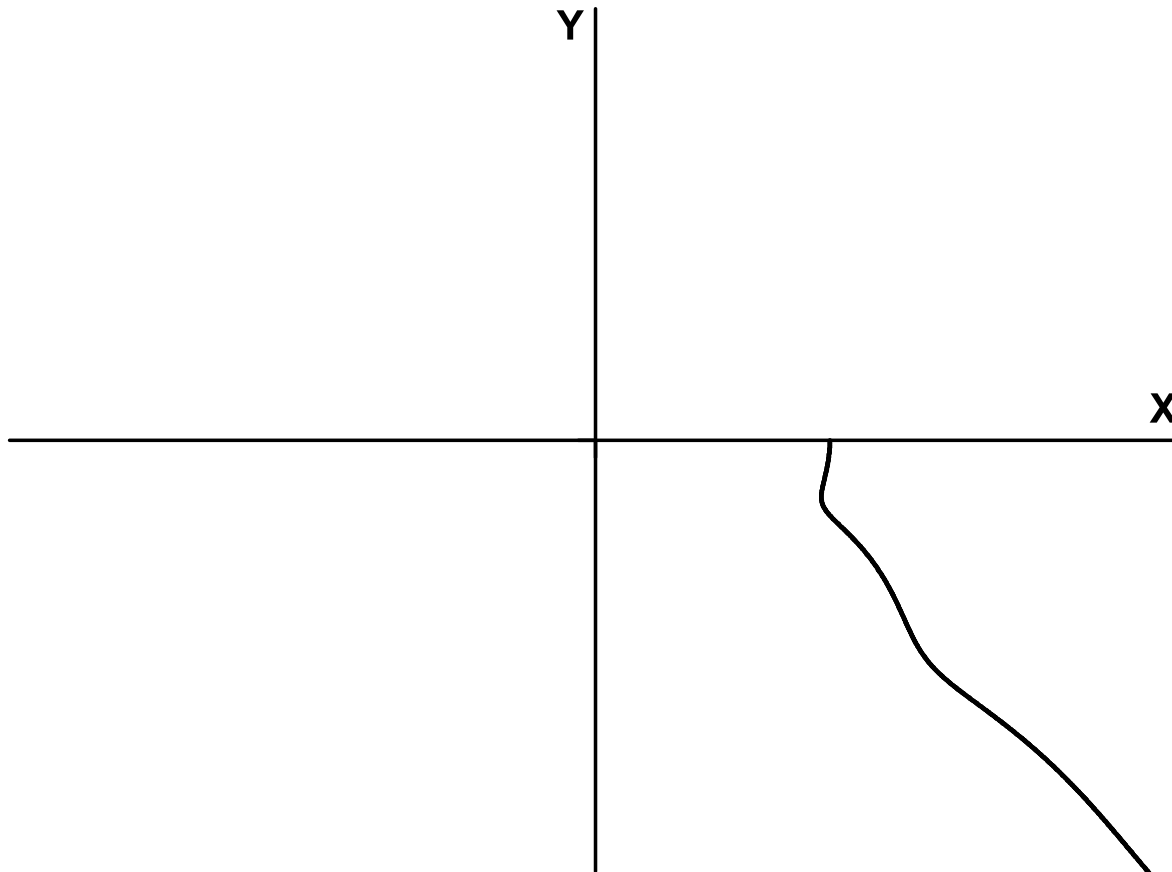
Powolny obrót ( $\Omega = 0.2$ ), pierwszy obszar stabilności



# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 1$$

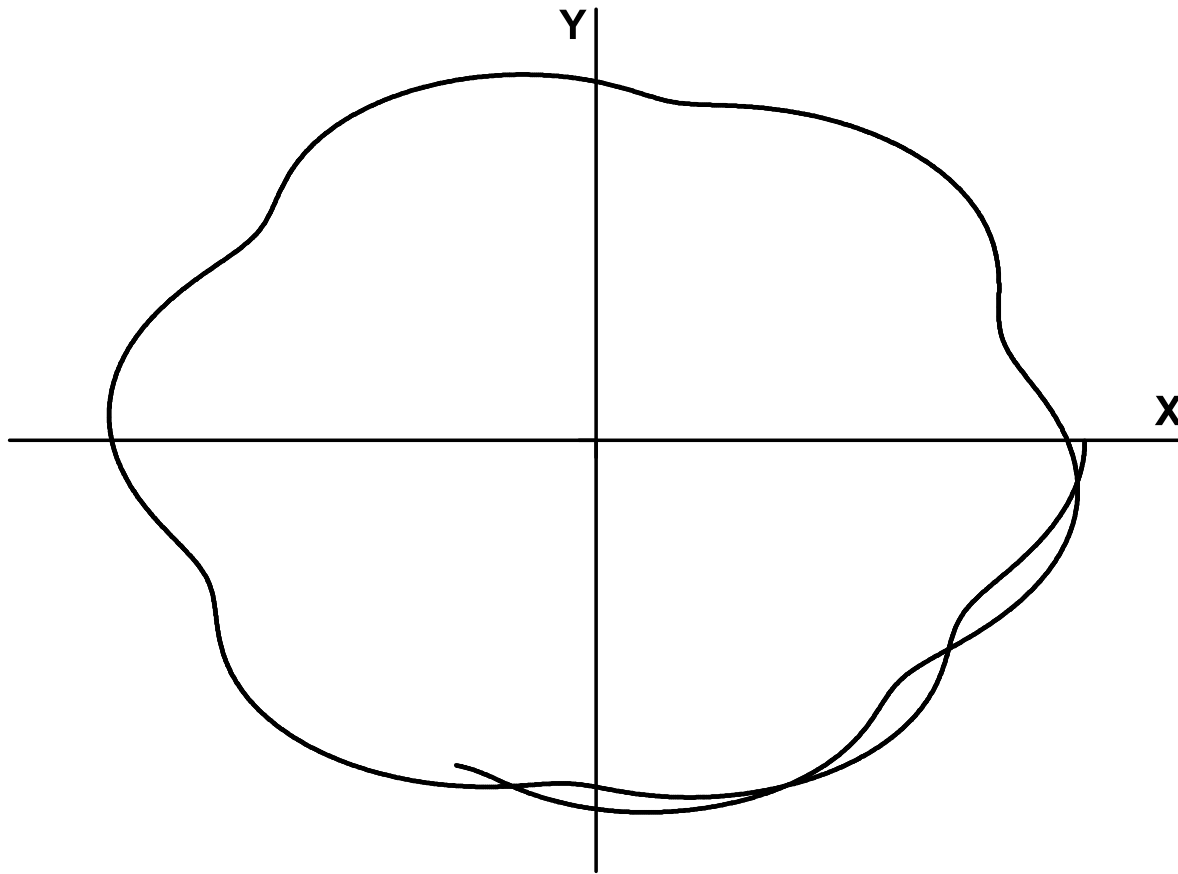
Obrót destrukcyjny ( $\Omega = 1.5$ ), obszar niestabilności



# Przypadek dwuwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 1$$

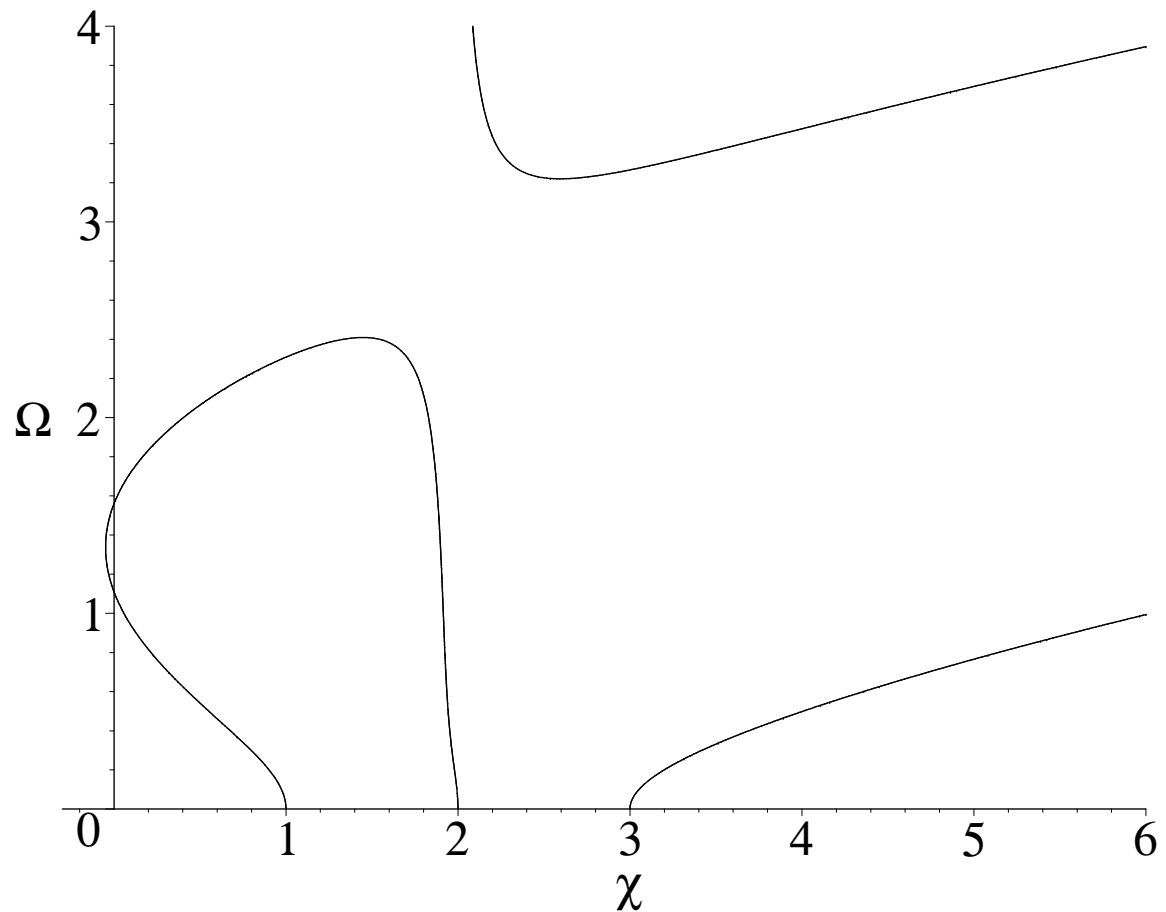
Szybki obrót ( $\Omega = 2$ ), drugi obszar stabilności



# Dowolne ustawienie osi obrotu

$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

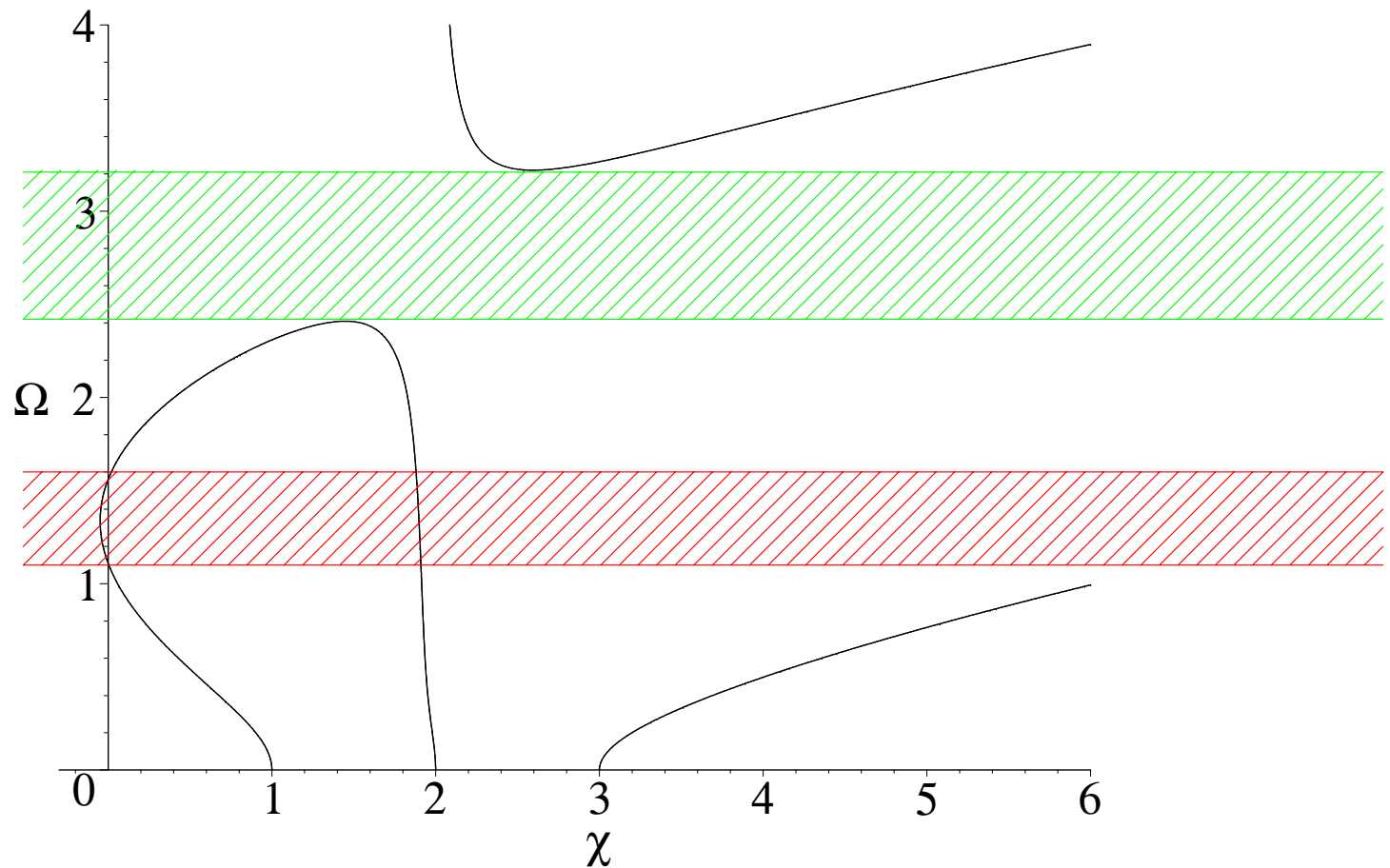
$$\Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$



# Dowolne ustawienie osi obrotu

$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

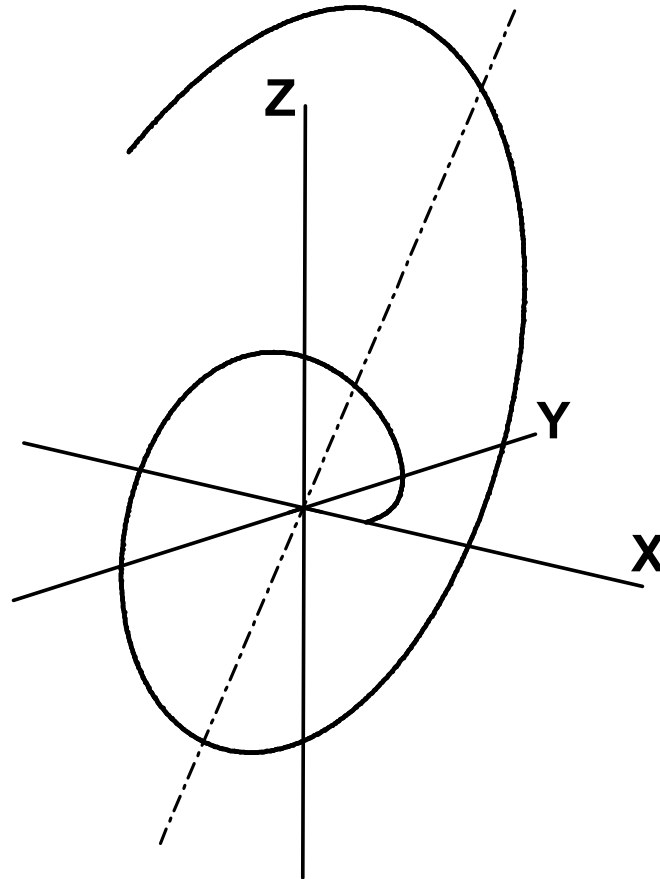
$$\Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$



# Przypadek trójwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

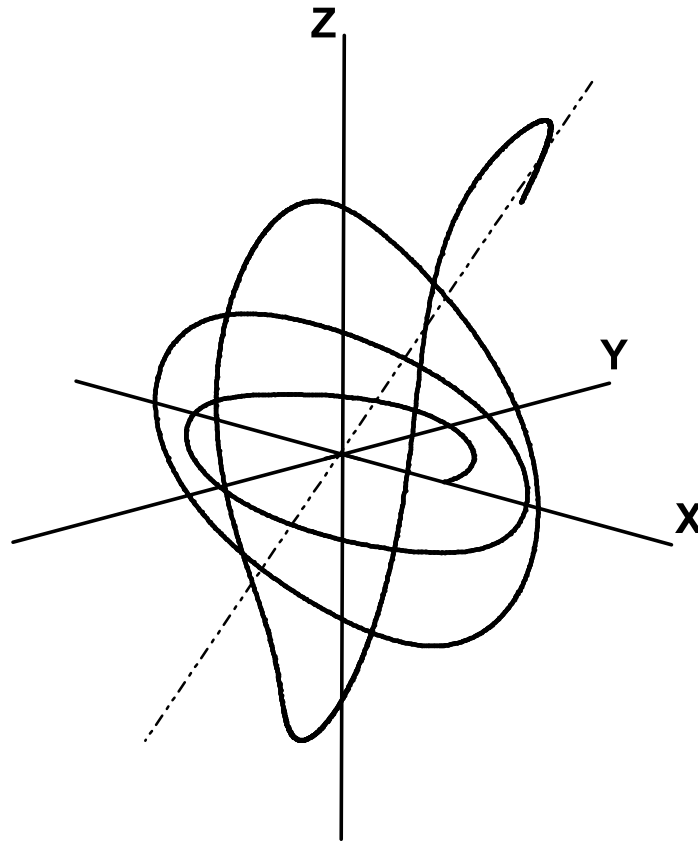
Pierwszy obszar niestabilności



# Przypadek trójwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

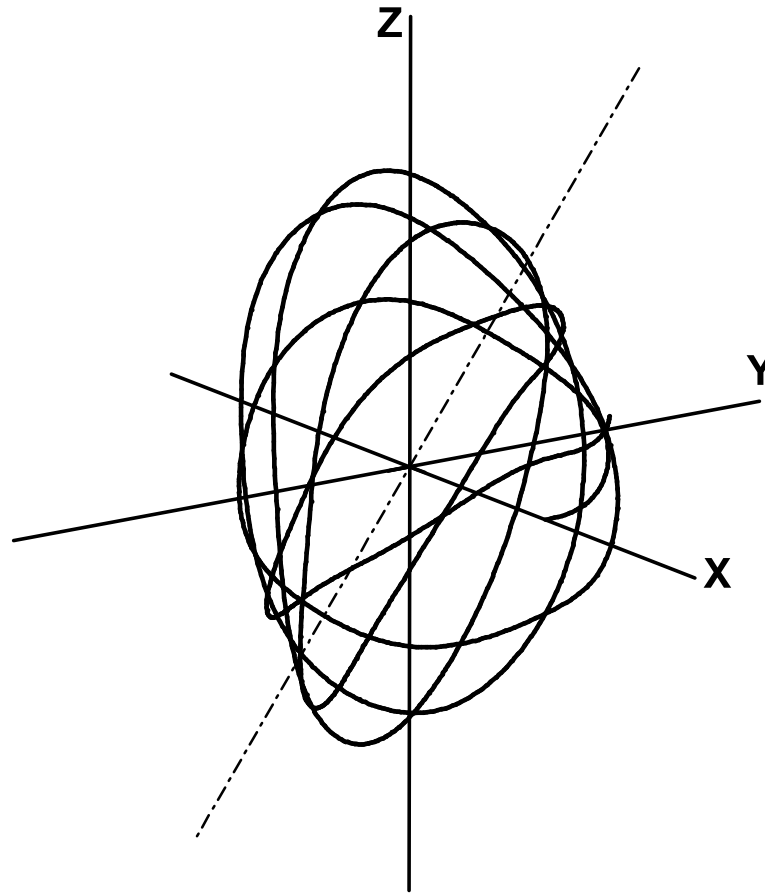
Drugi obszar niestabilności



# Przypadek trójwymiarowy

$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

Stabilizacja siłą Coriolisa



# Rezonans grawitacyjny

- Hamiltonian w obecności pola grawitacyjnego

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Równania ruchu nadal są liniowe, ale **niejednorodne**

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t) \end{aligned}$$

- Rozwiązanie równań ruchu jest postaci

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k(t) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^{(k)} \\ \mathbf{P}_0^{(k)} \end{pmatrix} e^{i\omega_k t}$$

# Rezonans grawitacyjny

- Dynamika konkretnego modu

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \gamma_{\parallel}^k e^{-i\omega_k(\Omega)t} + \gamma_{\perp}^k e^{i(\Omega - \omega_k(\Omega))t}$$

- Warunek rezonansu grawitacyjnego

$$\omega_k(\Omega) = \Omega$$

- Jest to ciekawy typ rezonansu

obrót pułapki  $\Omega$

częstość własna  $\omega$

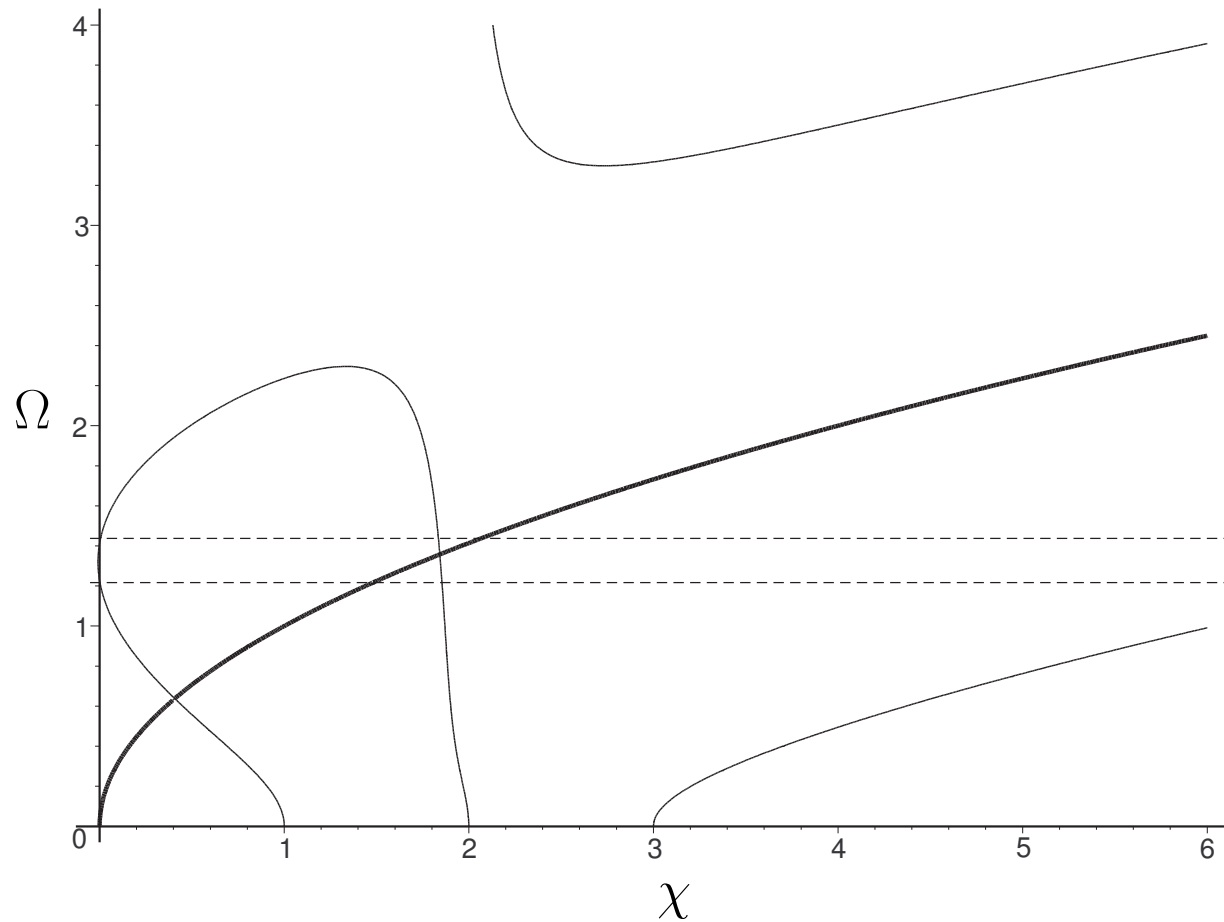
warunek rezonansu  $\omega = \Omega$



# Punkty rezonansowe

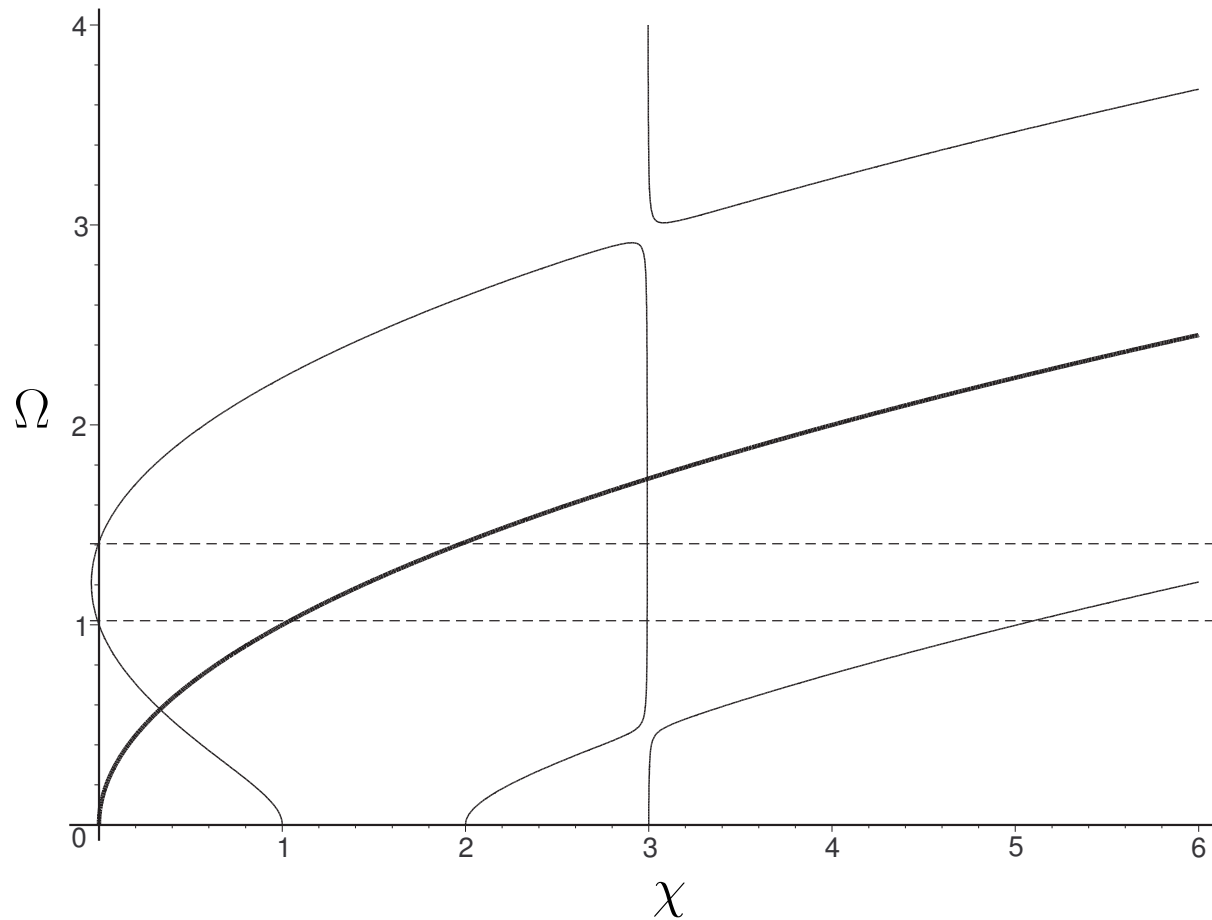
$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1$$

$$n_x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), n_y = 0, n_z = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$



# Punkty rezonansowe

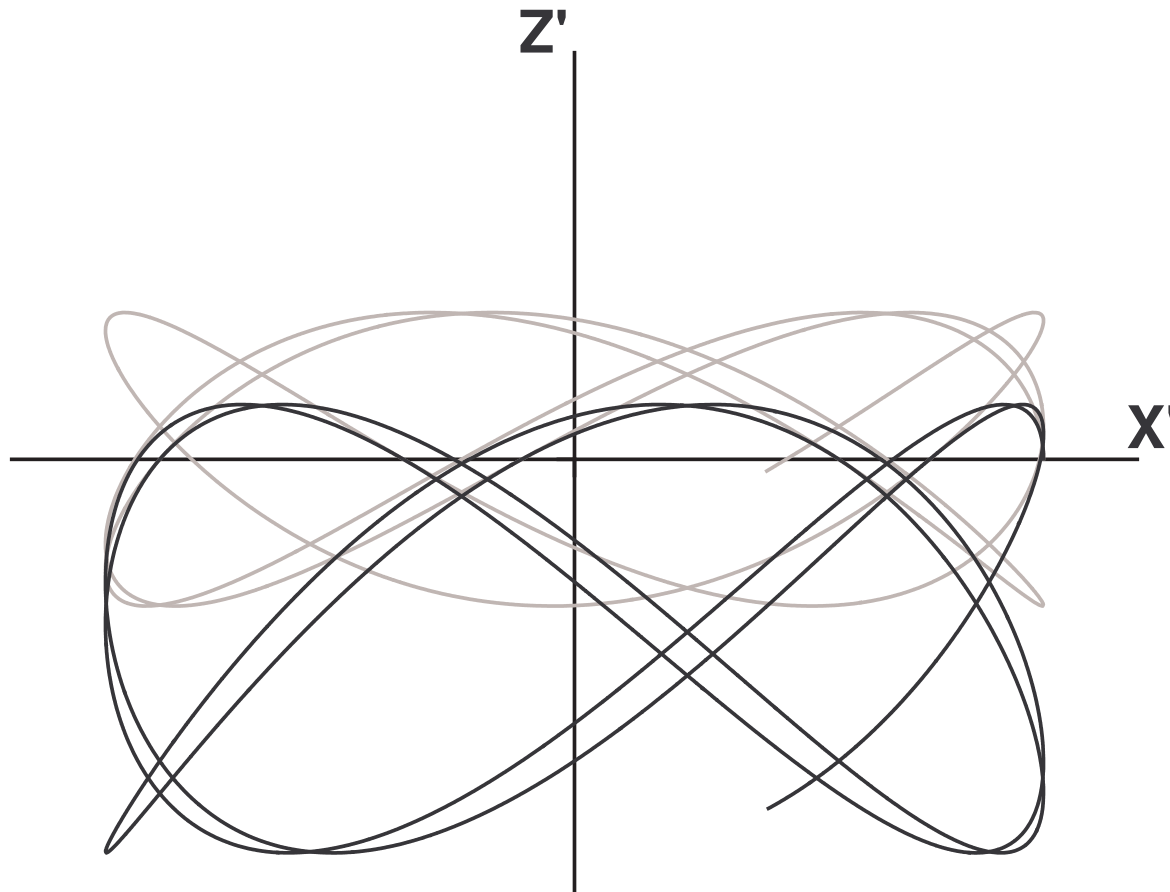
$$V_x = 3, V_y = 2, V_z = 1 \quad n_x = \cos\left(\frac{\pi}{60}\right), n_y = 0, n_z = \sin\left(\frac{\pi}{60}\right)$$



# Trajektorie w obecności grawitacji

$$V_x = 1, V_z = 3, \Omega = (0, 0, 0)$$

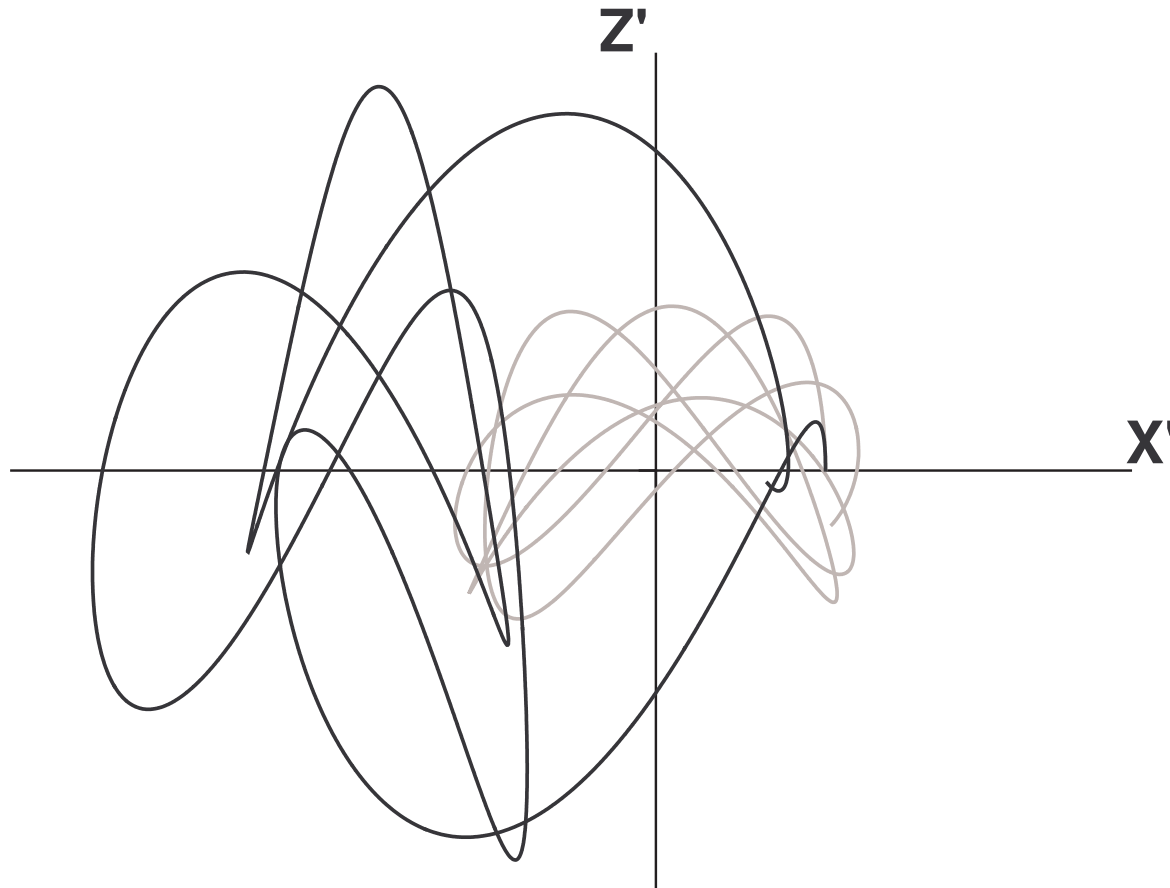
brak obrotu



# Trajektorie w obecności grawitacji

$$V_x = 1, V_z = 3, \Omega = (0, 0.15, 0)$$

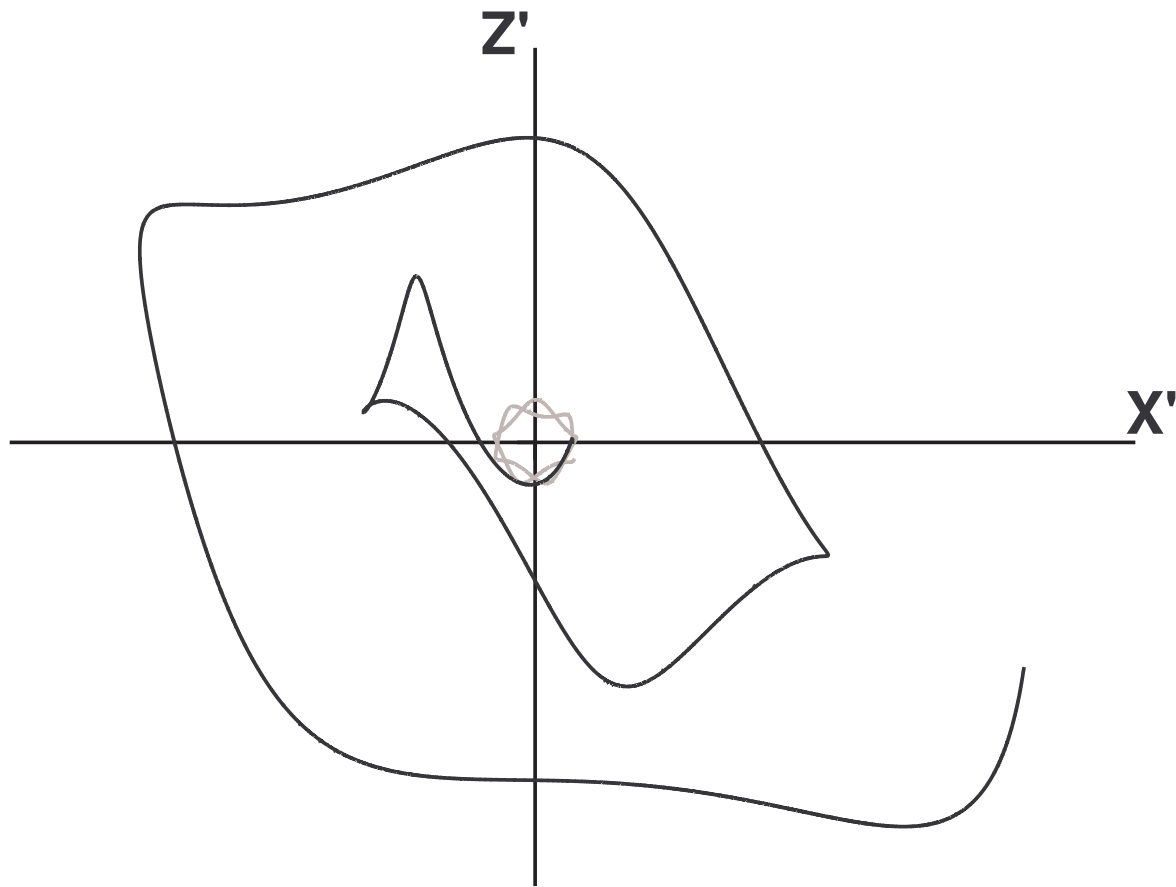
Poniżej częstotliwości rezonansowej



# Trajektorie w obecności grawitacji

$$V_x = 1, V_z = 3, \Omega = (0, \sqrt{\frac{3}{8}}, 0)$$

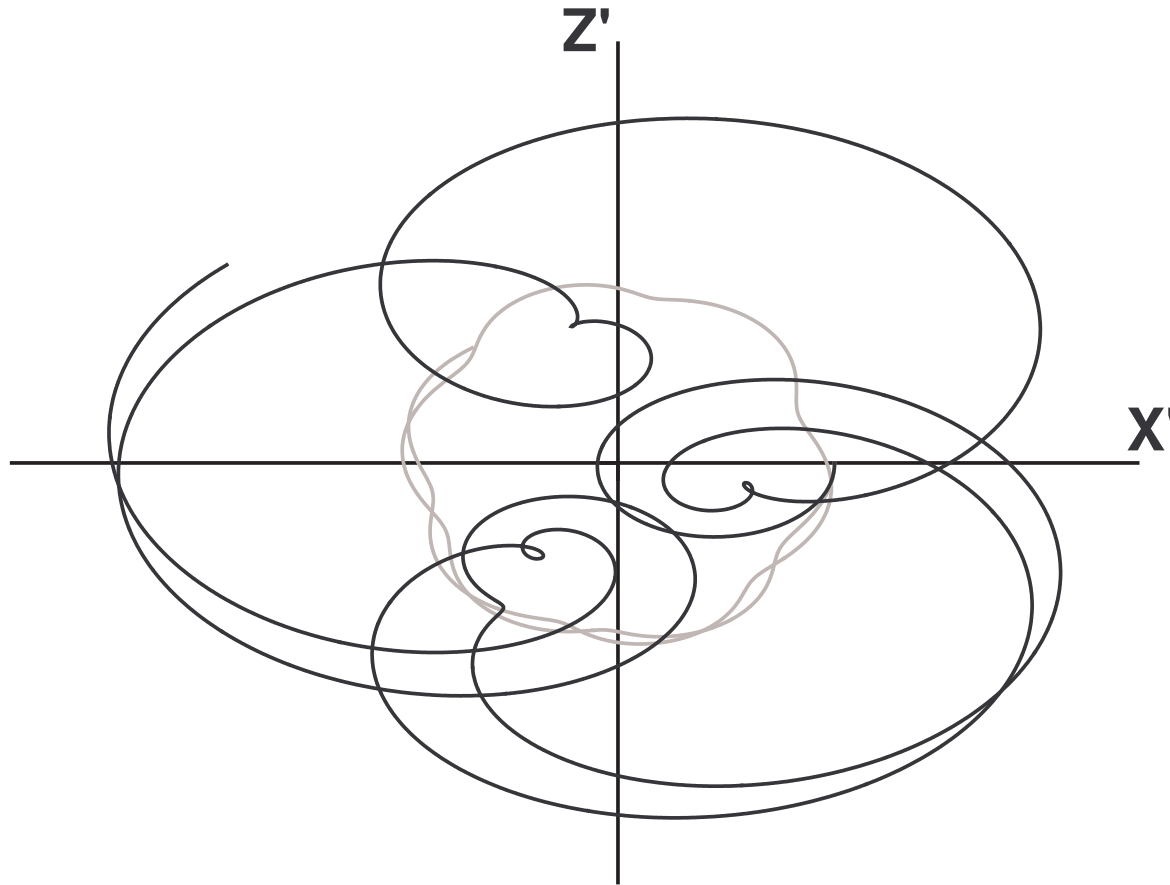
Obrót rezonansowy



# Trajektorie w obecności grawitacji

$$V_x = 1, V_z = 3, \Omega = (0, 2, 0)$$

Powyżej częstotliwości rezonansowej



# Dynamika kwantowa

- Hamiltonian kwantowy

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \nabla + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- zbadajmy ewolucję paczki gaussowskiej

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = N(t) \mathbf{e}^{\frac{i}{\hbar} \phi(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \cdot \hat{K}(t) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] + \frac{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}(t)}{\hbar} \right\}$$

- Średnie położenie i pęd

$$\langle \check{\mathbf{r}} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$$

$$\langle \check{\mathbf{p}} \rangle = \frac{\hbar}{i} \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \mathbf{P}(t)$$

# Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

# Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - mg(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

# Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - mg(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

# Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz  $\hat{K}$

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

# Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz  $\hat{K}$

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

# Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz  $\hat{K}$

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left( \frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left( \frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

# Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz  $\hat{K}$

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left( \frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left( \frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

# Ewolucja kształtu paczki

- Po uporządkowaniu równania mają postać:

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{1}{m}\hat{N} - \hat{\Omega} \cdot \hat{D}$$

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \hat{D} - \hat{\Omega} \cdot \hat{N}$$

- Przypomnijmy klasyczne równania ruchu:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)$$

- Kolumny  $\hat{N}$  i  $\hat{D}$  spełniają klasyczne równania ruchu!
- Kształt paczki nie czuje zewnętrznego pola!

# Przykład 1D

- Jednowymiarowy oscylator (bezwymiarowo):

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right] \psi(\xi, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\xi, \tau)$$

- Zbadamy ewolucję paczki gaussowskiej:

$$\psi(\xi, \tau) = N(\tau) e^{-\alpha(\tau) \xi^2 / 2} \quad \alpha(0) = 2$$

# Przykład 1D

- Jednowymiarowy oscylator (bezwymiarowo):

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right] \psi(\xi, \tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\xi, \tau)$$

- Zbadamy ewolucję paczki gaussowskiej:

$$\psi(\xi, \tau) = N(\tau) e^{-\alpha(\tau) \xi^2 / 2} \quad \alpha(0) = 2$$

- Rozwiązanie:  $\alpha(\tau) = -i \frac{n(\tau)}{d(\tau)}$

- warunek początkowy:  $n(0) = -2, \quad d(0) = i$

- i rozwiązujemy:

$$\begin{cases} \dot{d} = n \\ \dot{n} = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(\tau) = -2 \sin(\tau) + i \cos(\tau) \\ n(\tau) = -2 \cos(\tau) - i \sin(\tau) \end{cases}$$

# Generyczny stan stacjonarny

- Jeszcze raz ewolucja kształtu:

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

- Aby kształt nie zależał od czasu wystarczy, aby:

$$\begin{aligned}\hat{D}(t) &= \hat{D}_0 \cdot e^{i\hat{\omega}t} \\ \hat{N}(t) &= \hat{N}_0 \cdot e^{i\hat{\omega}t}\end{aligned}$$



$$\hat{K}_0 = -\frac{i}{m}\hat{N}_0 \cdot \hat{D}_0^{-1}$$

- Pamiętajmy, że klasyczne mody spełniają taki warunek:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(k)}(t) \\ \mathbf{p}^{(k)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^{(k)} \\ \mathbf{P}_0^{(k)} \end{pmatrix} e^{i\omega_k t}$$

- Z klasycznych amplitud można zbudować stacjonarną paczkę falową

# Przepis na funkcję falową

- Znajdź trzy mody własne:

$$\begin{pmatrix} R_0^{(1)} \\ P_0^{(1)} \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad \begin{pmatrix} R_0^{(2)} \\ P_0^{(2)} \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad \begin{pmatrix} R_0^{(3)} \\ P_0^{(3)} \end{pmatrix} e^{i\omega_3 t}$$

- Zbuduj macierze  $\hat{N}_0$  i  $\hat{D}_0$  następująco:

$$\hat{D}_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & R_0^{(2)} & R_0^{(3)} \end{pmatrix} \quad \hat{N}_0 = \begin{pmatrix} P_0^{(1)} & P_0^{(2)} & P_0^{(3)} \end{pmatrix}$$

# Przepis na funkcję falową

- Znajdź trzy mody własne:

$$\begin{pmatrix} R_0^{(1)} \\ P_0^{(1)} \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad \begin{pmatrix} R_0^{(2)} \\ P_0^{(2)} \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad \begin{pmatrix} R_0^{(3)} \\ P_0^{(3)} \end{pmatrix} e^{i\omega_3 t}$$

- Zbuduj macierze  $\hat{N}_0$  i  $\hat{D}_0$  następująco:

$$\hat{D}_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(1)} & R_0^{(2)} & R_0^{(3)} \end{pmatrix} \quad \hat{N}_0 = \begin{pmatrix} P_0^{(1)} & P_0^{(2)} & P_0^{(3)} \end{pmatrix}$$

- Wylicz macierz  $\hat{K}_0 = -\frac{i}{m} \hat{N}_0 \cdot \hat{D}_0^{-1}$

- Gaussowska funkcja falowa

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = N e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

opisuje stan stacjonarny Hamiltonianu

# Wybór modów własnych

- Układ posiada **6** modów własnych o częstościach:

$$\pm\omega_1 \quad \pm\omega_2 \quad \pm\omega_3$$

- Potrzebujemy **3** mody do konstrukcji macierzy  $\hat{N}_0$  i  $\hat{D}_0$
- Które mody należy wybrać?

# Wybór modów własnych

- Układ posiada **6** modów własnych o częstościach:

$$\pm\omega_1 \quad \pm\omega_2 \quad \pm\omega_3$$

- Potrzebujemy **3** mody do konstrukcji macierzy  $\hat{N}_0$  i  $\hat{D}_0$

- Które mody należy wybrać?

- Należy wybrać te mody, które zapewnią  $\text{Re}\hat{K}_0 > 0$
- Istnieje tylko jedna taka kombinacja!
- Z każdej pary o określonej częstości jest wybrany dokładnie jeden mod
- Nawet gdy hamiltonian nie jest dodatniookreślony istnieje taka kombinacja!

# Inne stany stacjonarne

- Aby znaleźć inne stany stacjonarne zbadajmy ewolucję funkcji:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = N e^{\frac{i}{\hbar} \phi(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \cdot \hat{K}_0 \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] + \frac{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}(t)}{\hbar} \right\}$$

- teraz kształt  $\hat{K}_0$  nie zmienia się w czasie
- Średnie położenie i pęd spełniają klasyczne równania

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} &= \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t) \\ \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) \end{aligned}$$

- Wybierzmy mod o częstotliwości  $-\omega_k$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^{(-k)} \\ \mathbf{P}_0^{(-k)} \end{pmatrix} e^{-i\omega_k t}$$

# Inne stany stacjonarne

- Funkcję falową ma wtedy postać

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i\Omega_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{r}) e^{-in\omega_k t} e^{-\frac{m}{2\hbar} \mathbf{r} \cdot \hat{K}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\text{Re} \hat{K}_0)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_k \propto m \hat{K}_0 \cdot \mathbf{R}_0^{(-k)} + i \mathbf{P}_0^{(-k)}$$

- Stanem stacjonarnym hamiltonianu jest zatem:

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = A_n H_n(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r})$$

$$E_n = \hbar(n\omega_k - \Omega_0)$$

- Konstrukcję należy powtórzyć dla wszystkich klasycznych modów.

# Przykład 1D

Równania ruchu

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)}{m}$$

$$\dot{p}(t) = -m\Omega x(t)$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)}{m}$$

$$\dot{p}(t) = -m\Omega x(t)$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\Omega x(t)\end{aligned}$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$\begin{aligned}D_0 &= 1 & D_0 &= -1 \\ N_0 &= im\Omega & N_0 &= im\Omega \\ K_0 &= \Omega & K_0 &= -\Omega\end{aligned}$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\Omega x(t)\end{aligned}$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$\begin{aligned}D_0 &= 1 & D_0 &= -1 \\ N_0 &= im\Omega & N_0 &= im\Omega \\ K_0 &= \Omega & K_0 &= -\Omega\end{aligned}$$

## Gaussowski stan stacjonarny

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} x^2\right)$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\Omega x(t)\end{aligned}$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$\begin{aligned}D_0 &= 1 & D_0 &= -1 \\ N_0 &= im\Omega & N_0 &= im\Omega \\ K_0 &= \Omega & K_0 &= -\Omega\end{aligned}$$

## Gaussowski stan stacjonarny

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} x^2\right)$$

## Ruch po klasycznej trajektorii

$$\Psi(x, t) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - R(t))^2 + \frac{ixP(t)}{\hbar}\right)$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)}{m}$$
$$\dot{p}(t) = -m\Omega x(t)$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$D_0 = 1 \quad D_0 = -1$$
$$N_0 = im\Omega \quad N_0 = im\Omega$$
$$K_0 = \Omega \quad K_0 = -\Omega$$

## Gaussowski stan stacjonarny

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} x^2\right)$$

## Ruch po klasycznej trajektorii

$$\Psi(x, t) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - R(t))^2 + \frac{ixP(t)}{\hbar}\right)$$

## Ruch po trajektorii drugiego modu

$$R(t) = e^{-i\Omega t}$$
$$P(t) = im\Omega e^{-i\Omega t}$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\Omega x(t)\end{aligned}$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$\begin{aligned}D_0 &= 1 & D_0 &= -1 \\ N_0 &= im\Omega & N_0 &= im\Omega \\ K_0 &= \Omega & K_0 &= -\Omega\end{aligned}$$

## Gaussowski stan stacjonarny

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} x^2\right)$$

## Ruch po klasycznej trajektorii

$$\Psi(x, t) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - R(t))^2 + \frac{ixP(t)}{\hbar}\right)$$

## Ruch po trajektorii drugiego modu

$$\begin{aligned}R(t) &= e^{-i\Omega t} \\ P(t) &= im\Omega e^{-i\Omega t}\end{aligned}$$

## Rozwinięcie w wielomiany Hermitta

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\alpha x) e^{-in\Omega t} e^{i\Omega_0 t} \Psi_0(x)$$

$$\Omega_0 = -\frac{\Omega}{2} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}$$

# Przykład 1D

## Równania ruchu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) &= -m\Omega x(t)\end{aligned}$$

## Mody własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ im\Omega \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

## Kształt stanu stacjonarnego

$$\begin{aligned}D_0 &= 1 & D_0 &= -1 \\ N_0 &= im\Omega & N_0 &= im\Omega \\ K_0 &= \Omega & K_0 &= -\Omega\end{aligned}$$

## Gaussowski stan stacjonarny

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} x^2\right)$$

## Ruch po klasycznej trajektorii

$$\Psi(x, t) = N \exp\left(-\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - R(t))^2 + \frac{ixP(t)}{\hbar}\right)$$

## Ruch po trajektorii drugiego modu

$$\begin{aligned}R(t) &= e^{-i\Omega t} \\ P(t) &= im\Omega e^{-i\Omega t}\end{aligned}$$

## Rozwinięcie w wielomiany Hermitta

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\alpha x) e^{-in\Omega t} e^{i\Omega_0 t} \Psi_0(x)$$

## Zupełny układ stanów

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= A_n H_n\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} x\right) \Psi_0(x) \\ E_n &= \hbar(n\Omega + \Omega/2)\end{aligned}$$

$$\Omega_0 = -\frac{\Omega}{2} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}$$

# Podsumowanie

## Wirująca pułapka harmoniczna

### Dynamika klasyczna

- obrót wokół osi głównej
- obrót wokół dowolnej osi
- stabilność dynamiki
- obszary niestabilności

#### Pole grawitacyjne

- nietrywialny wpływ pola
- rezonans grawitacyjny

### Dynamika kwantowa

- dynamika gaussowskiego stanu
- gaussowski stan stacjonarny
- rodzina stanów stacjonarnych

*Cała dynamika kwantowa  
opisana w języku  
dynamiki klasycznej*