Ruch w obracającym się potencjale harmonicznym

pełne rozwiązanie

Tomasz Sowiński

Trochę mechaniki klasycznej...

- hamiltonian ($m = 1$)

$$\mathcal{H}(t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\hat{V}(t)\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \mathbf{r}\hat{\Omega}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\hat{V}\mathbf{r}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V_x & 0 & 0 \\ 0 & V_y & 0 \\ 0 & 0 & V_z \end{pmatrix} \qquad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

- równania ruchu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - \hat{\Omega}\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\hat{V}\mathbf{r} - \hat{\Omega}\mathbf{p} \end{cases}$$

Rozwiązania poprzez mody

- Równania ruchu w całej okazałości:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y & 1 & 0 & 0 \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x & 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -V_x & 0 & 0 & 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ 0 & -V_y & 0 & \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ 0 & 0 & -V_z & -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

- Szukamy rozwiązań w postaci:

$$\vec{\mathcal{R}}(t) = \vec{\mathcal{R}}_0 e^{i\omega t}$$

gdzie $\vec{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$, ω - częstość własna danego modu.

Częstości własne, a stabilność układu

- Równanie na częstości własne ($\vec{\Omega} = \Omega\vec{n}$)

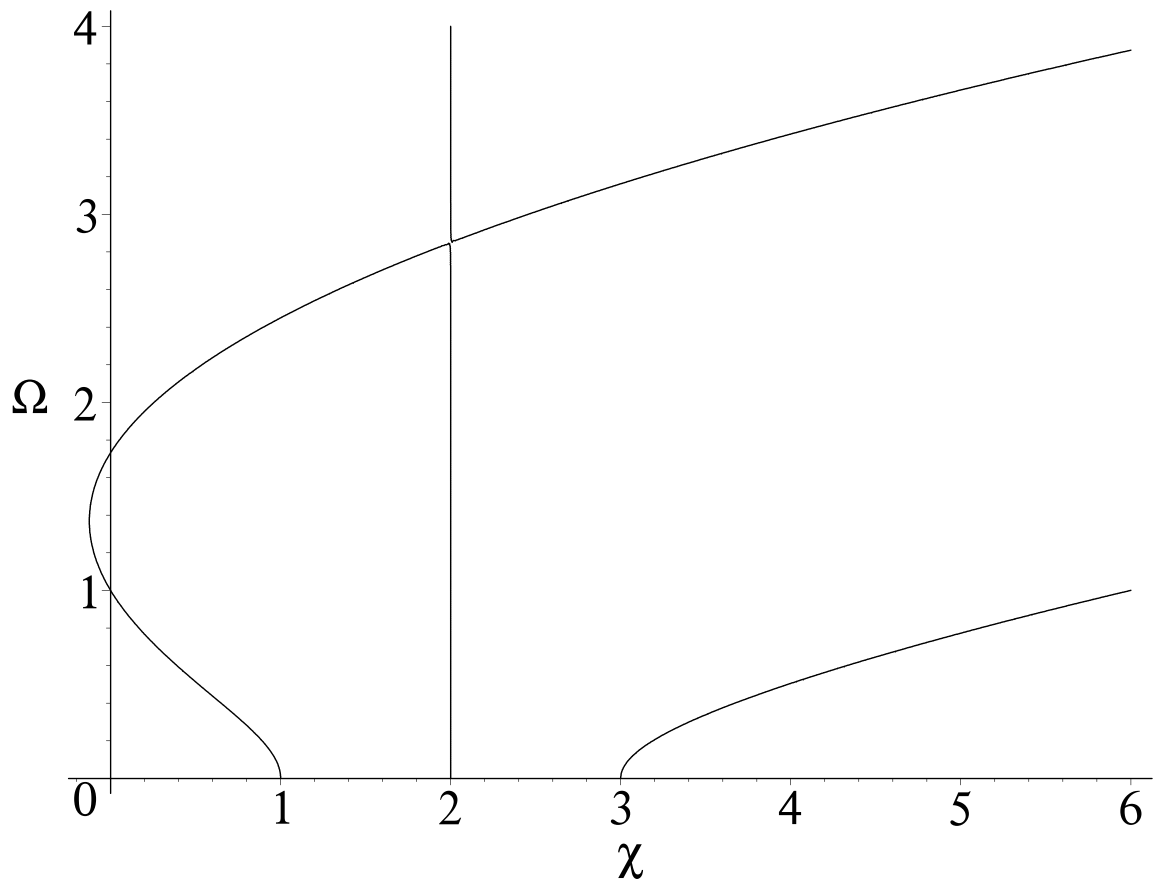
$$\begin{aligned}
\omega^6 + a\omega^4 + b\omega^2 + c &= 0 \\
\chi^3 + a\chi^2 + b\chi + c &= 0 \qquad (\omega^2 = \chi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= -2\Omega^2 - \mathrm{Tr}(\hat{V}) \\
b &= \Omega^4 + \Omega^2 \left[3\vec{n}\hat{V}\vec{n} - \mathrm{Tr}(\hat{V})\right] + \frac{\mathrm{Tr}(\hat{V})^2 - \mathrm{Tr}(\hat{V}^2)}{2} \\
c &= -\Omega^4\vec{n}\hat{V}\vec{n} + \Omega^2\left[\mathrm{Tr}(\hat{V})\vec{n}\hat{V}\vec{n} - \vec{n}\hat{V}^2\vec{n}\right] - \mathrm{Det}(\hat{V})
\end{aligned}$$

- Dla ustalonego $\hat{V}$ i $\vec{n}$ równanie na częstości własne zadaje nam krzywą $f(\chi, \Omega) = \chi^3 + a(\Omega)\chi^2 + b(\Omega)\chi + c(\Omega) = 0$.

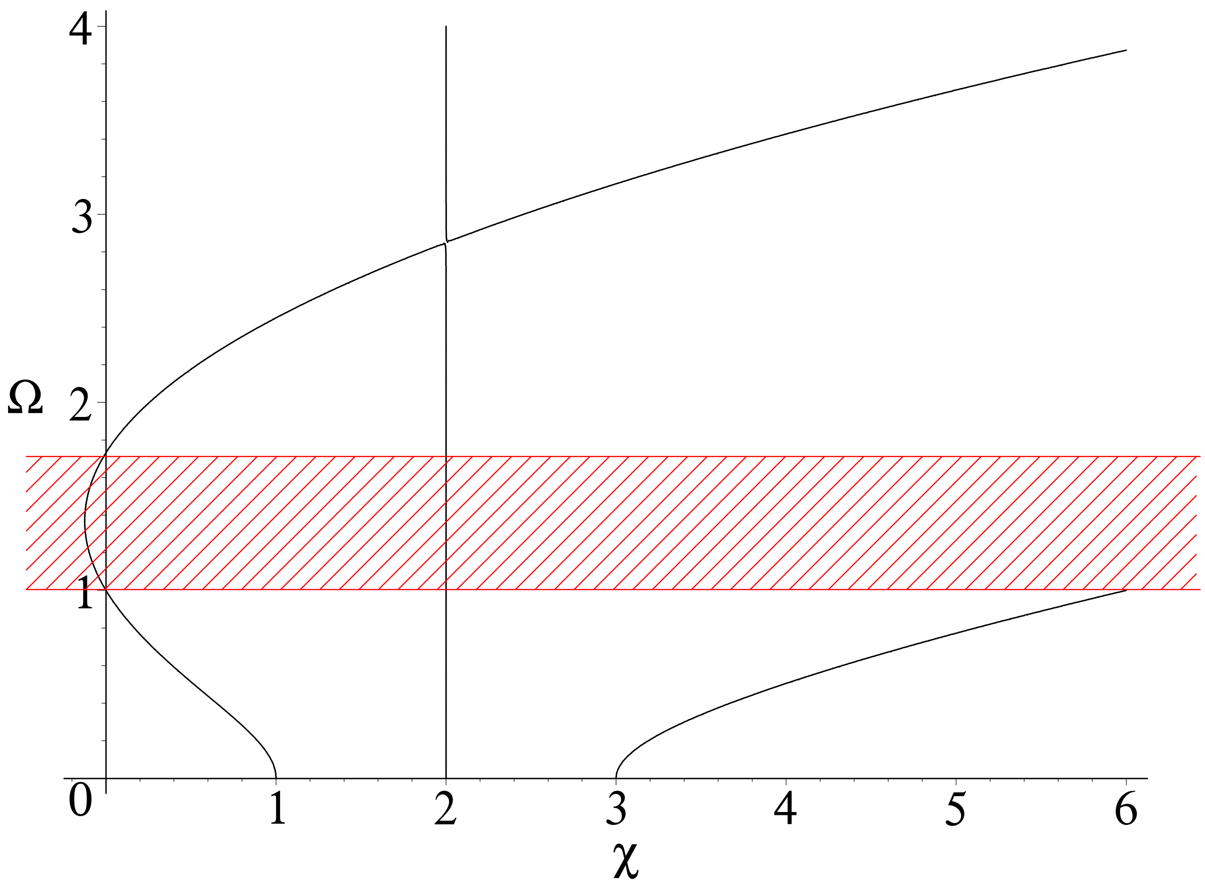
Przypadek dwuwymiarowy

$V_x = 1$, $V_y = 3$, $V_z = 2$ $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$



Przypadek dwuwymiarowy

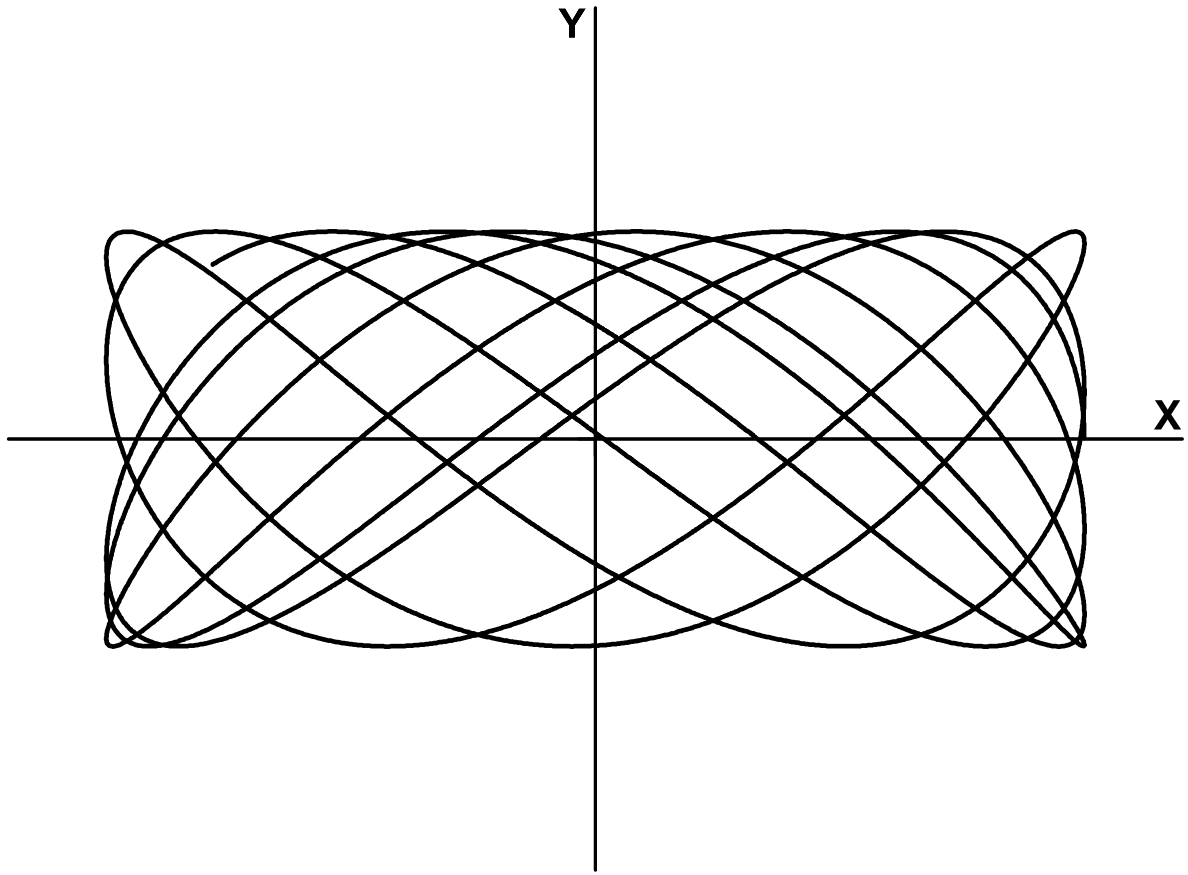
$V_x = 1$, $V_y = 3$, $V_z = 2$ $\qquad \vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$



Przypadek dwuwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 1$

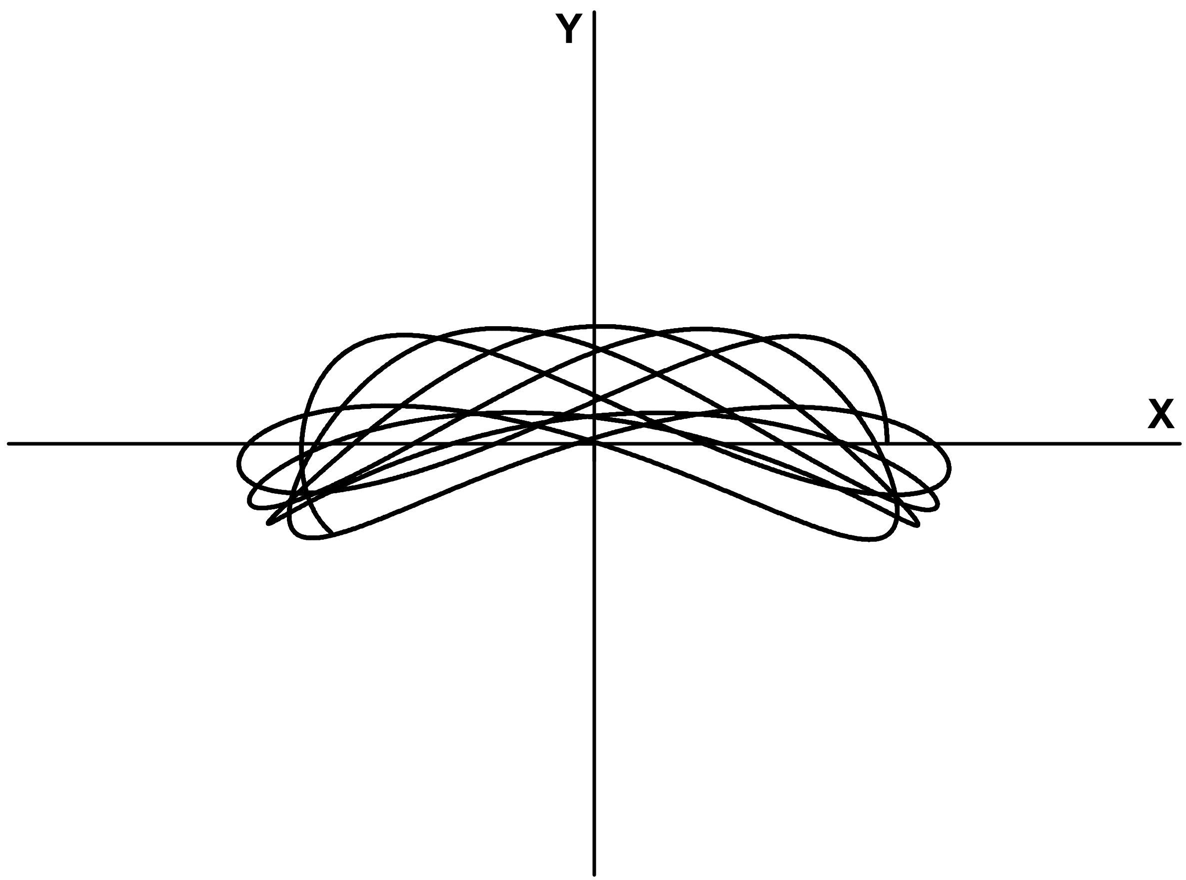
Potencjał nieobracający się



Przypadek dwuwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 1$

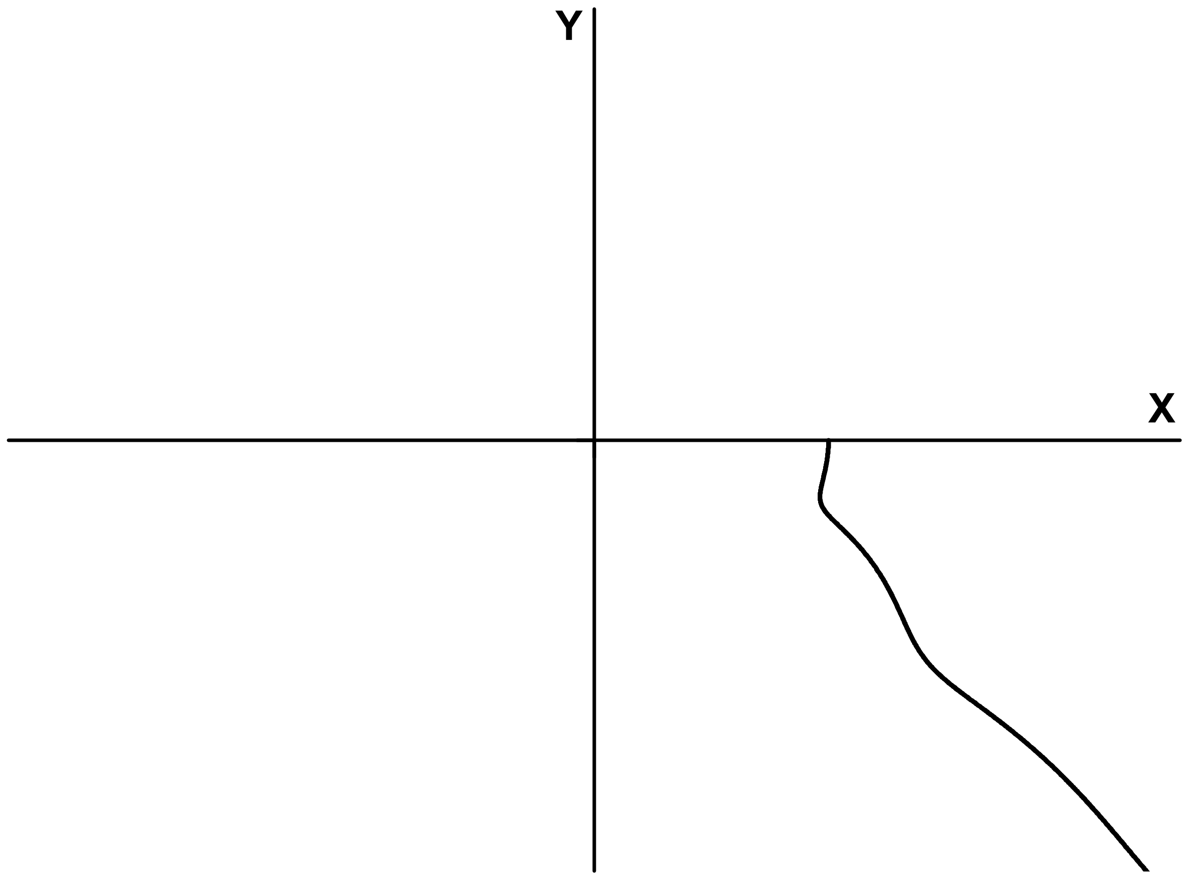
Powolny obrót ($\Omega = 0.2$), pierwszy obszar stabilności



Przypadek dwuwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 1$

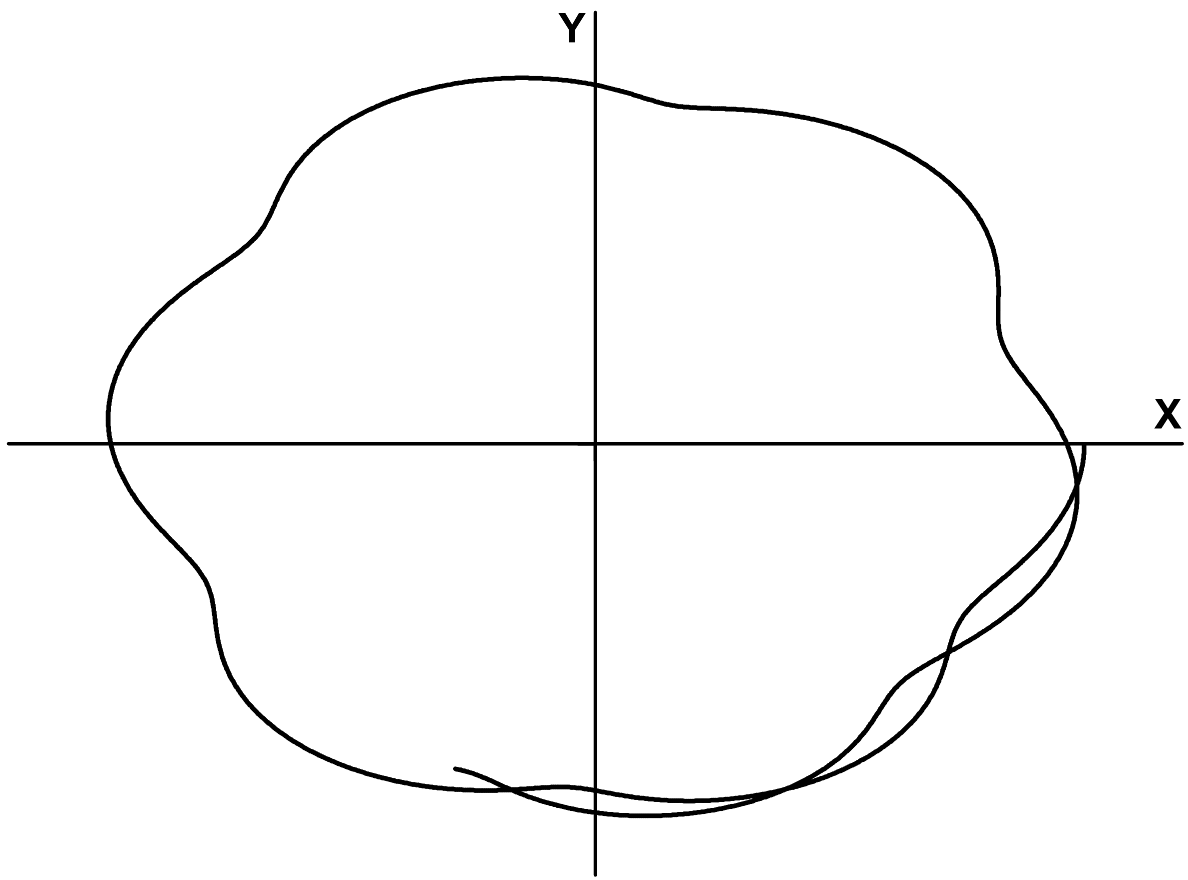
Obrót destrukcyjny ($\Omega = 1.5$), obszar niestabilności



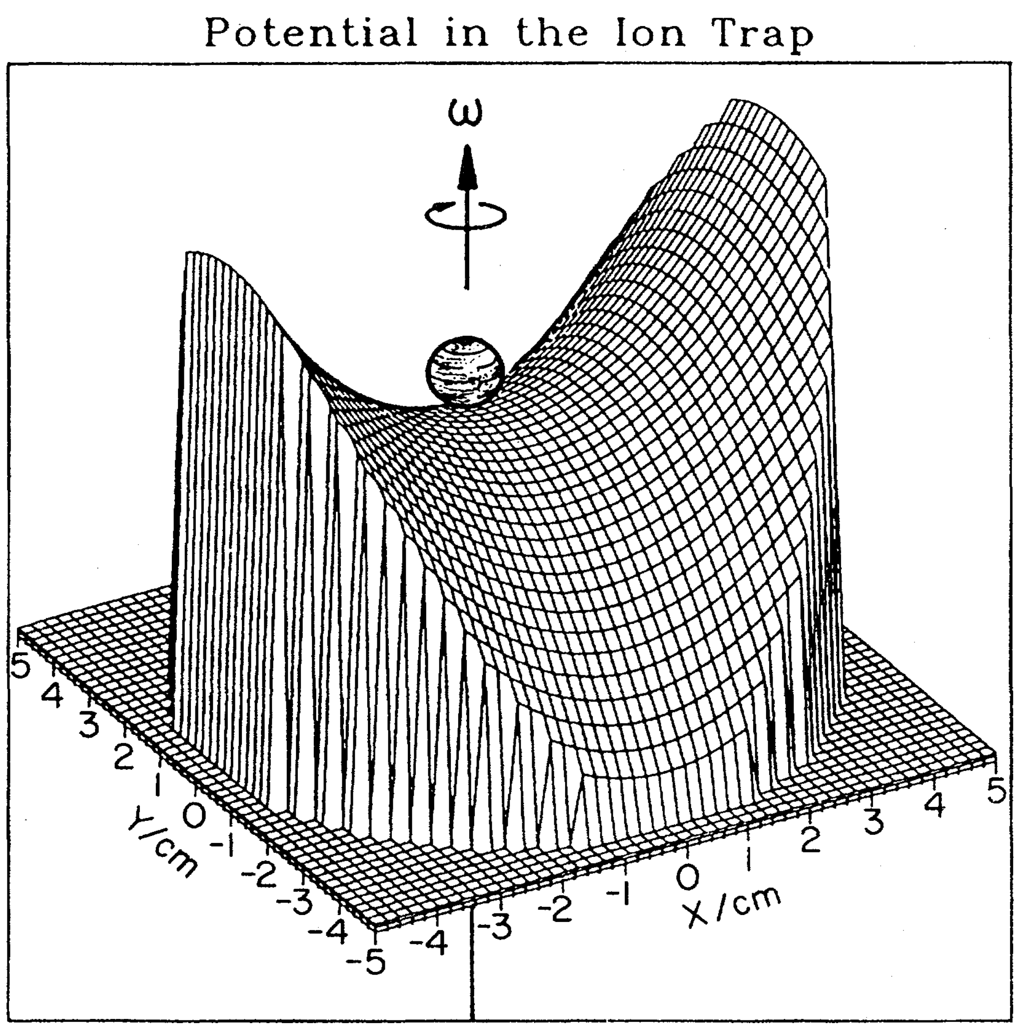
Przypadek dwuwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 1$

Szybki obrót ($\Omega = 2$), drugi obszar stabilności

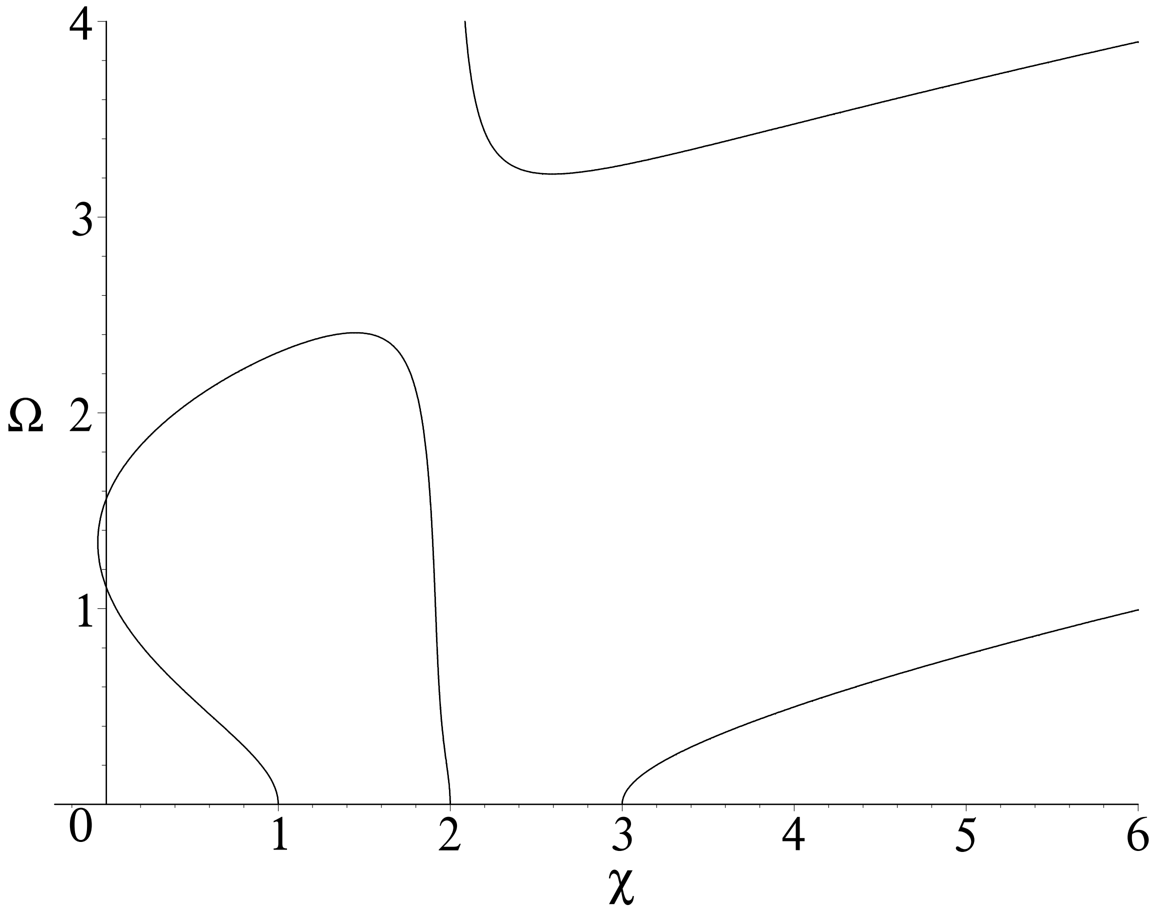


Pułapka Paula (Nagroda Nobla 1989)



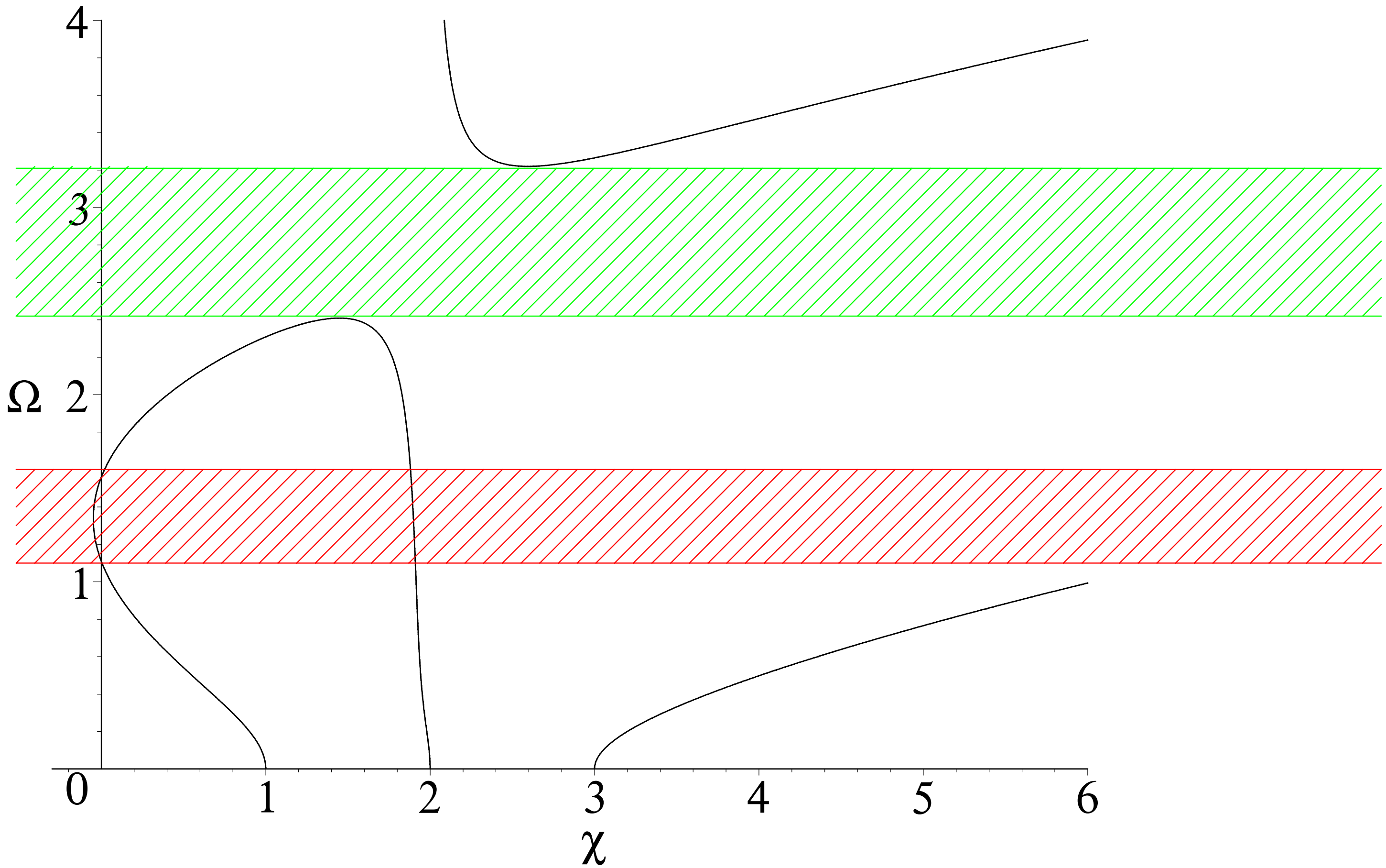
Dowolne ustawienie osi obrotu

$V_x = 3$, $V_y = 2$, $V_z = 1$ $\qquad \vec{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}(1,1,1)$



Dowolne ustawienie osi obrotu

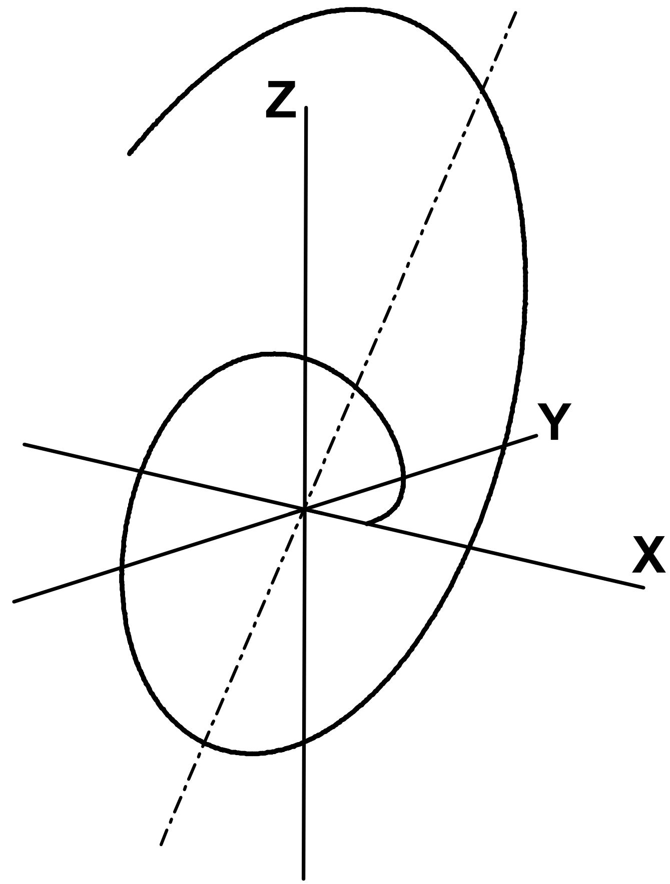
$V_x = 3$, $V_y = 2$, $V_z = 1$ $\qquad \vec{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$



Przypadek trójwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 2$, $V_z = 1$

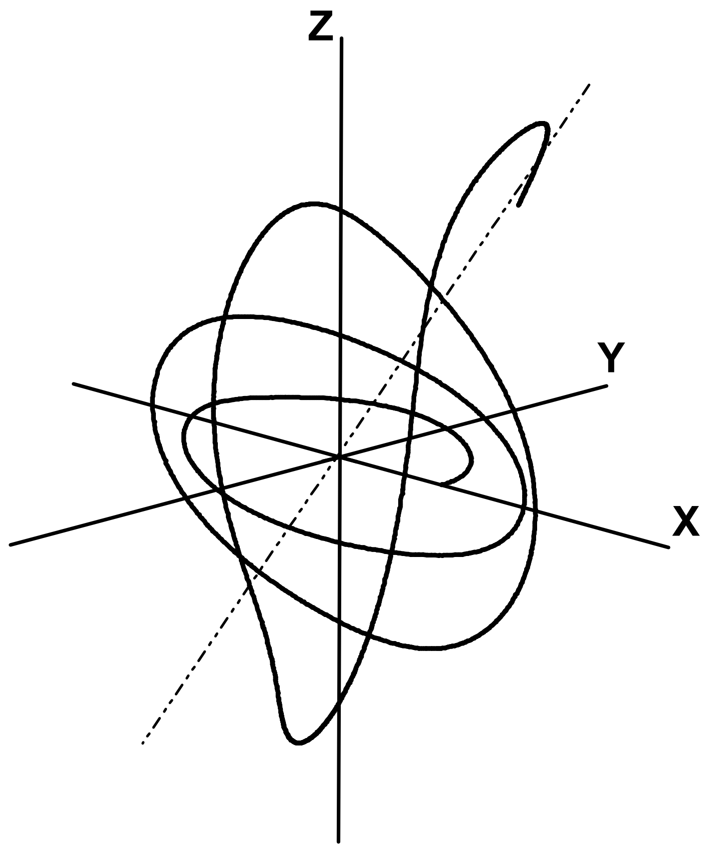
Pierwszy obszar niestabilności



Przypadek trójwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 2$, $V_z = 1$

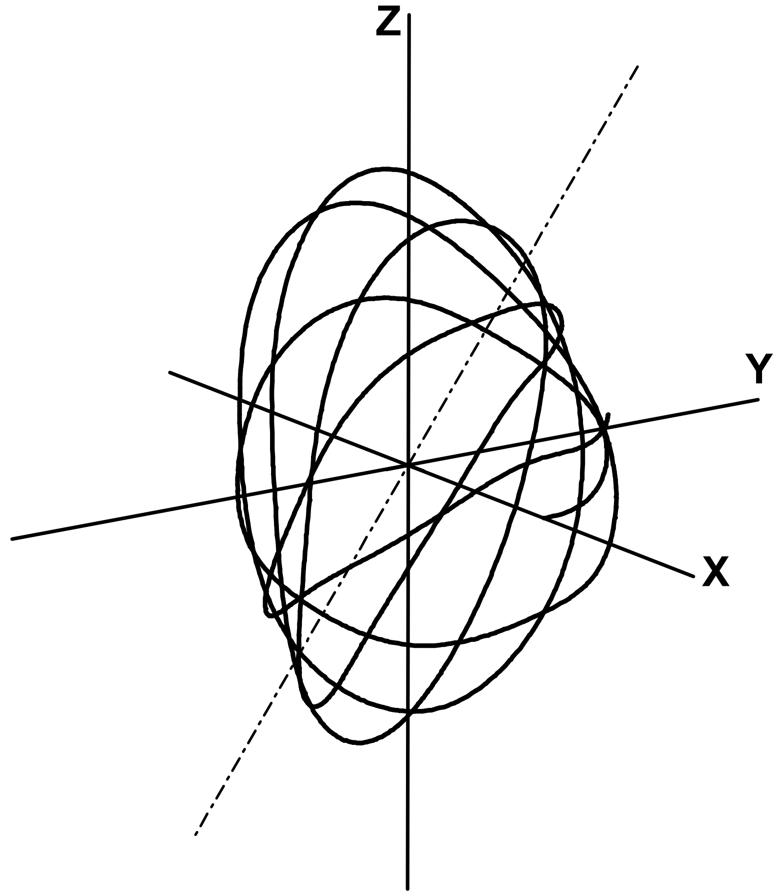
Drugi obszar niestabliności



Przypadek trójwymiarowy

$V_x = 3$, $V_y = 2$, $V_z = 1$

Stabilizacja siłą Coriolisa



Dowolne ustawienie osi obrotu

- WNIOSEK:

  Obrót wokół osi obrotu niepokrywającej się z żadną osią główną potencjału całkowicie zmienia własności ruchu i nie jest trywialnym uogólnieniem obrotu dwuwymiarowego

Zagadanienie fukcji falowej

- Załóżmy, że układ kwantowy jest opisywany funkcją gaussowską

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \mathcal{M}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{r}\hat{K}(t)\mathbf{r}}$$

gdzie $\hat{K}$ jest dowolną zespoloną macierzą symetryczną z dodatniookreśloną częścią rzeczywistą.

- Z równania Schrödingera $i\partial_t\Psi = \mathcal{H}\Psi$ ($\hbar = 1$) wynika równanie na ewolucję $\hat{K}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{K} = -i\hat{K}^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}]$$

Dekompozycja

- Szukamy macierzy $\hat{K}$ w postaci:

$$\hat{K}(t) = -i\hat{N}(t)\hat{D}^{-1}(t)$$

- równanie na $\hat{K}$ w tych terminach

$$-i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}\right)\hat{D}^{-1} + i\hat{N}\hat{D}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{D}\right)\hat{D}^{-1} =$$
$$= i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{N}\hat{D}^{-1} + i\hat{V} + i\hat{\Omega}\hat{N}\hat{D}^{-1} - i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{\Omega}$$

Dekompozycja

- Szukamy macierzy $\hat{K}$ w postaci:

$$\hat{K}(t) = -i\hat{N}(t)\hat{D}^{-1}(t)$$

- równanie na $\hat{K}$ w tych terminach

$$-i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}\right)\hat{D}^{-1} + i\hat{N}\hat{D}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{D}\right)\hat{D}^{-1} =$$
$$= i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{N}\hat{D}^{-1} + i\hat{V} + i\hat{\Omega}\hat{N}\hat{D}^{-1} - i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{\Omega}$$

Dekompozycja

- Szukamy macierzy $\hat{K}$ w postaci:

$$\hat{K}(t) = -i\hat{N}(t)\hat{D}^{-1}(t)$$

- równanie na $\hat{K}$ w tych terminach

$$-i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}\right)\hat{D}^{-1} + i\hat{N}\hat{D}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{D}\right)\hat{D}^{-1} =$$
$$= i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{N}\hat{D}^{-1} + i\hat{V} + i\hat{\Omega}\hat{N}\hat{D}^{-1} - i\hat{N}\hat{D}^{-1}\hat{\Omega}$$

- Wystarczy, że będzie spełniony układ (EUREKA!)

$$\begin{cases} \dot{\hat{D}} = \hat{N} - \hat{\Omega}\hat{D} \\ \dot{\hat{N}} = -\hat{V}\hat{D} - \hat{\Omega}\hat{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - \hat{\Omega}\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\hat{V}\mathbf{r} - \hat{\Omega}\mathbf{p} \end{cases}$$

Stan stacjonarny

- Aby $\hat{K}$ nie zależało od czasu wystarczy, by:

$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{\mathcal{D}}\mathrm{e}^{i\hat{\omega}t} \\ \hat{N} = \hat{\mathcal{N}}\mathrm{e}^{i\hat{\omega}t} \end{cases}$$

- Wiemy dodatkowo, że macierze $\hat{D}$ i $\hat{N}$ spełniają klasyczne równania ruchu
- Znamy takie rozwiązania klasycznie - MODY WŁASNE!!!

$$\vec{\mathcal{R}}(t) = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad \vec{\mathcal{P}}(t) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Przepis na funkcje falową

- Ustawić mody obok siebie

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \left(\underset{\rightsquigarrow\ \omega_1}{\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}} \quad \underset{\rightsquigarrow\ \omega_2}{\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}} \quad \underset{\rightsquigarrow\ \omega_3}{\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}} \right) \\
\mathcal{N} &= \left(\underset{\rightsquigarrow\ \omega_1}{\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}} \quad \underset{\rightsquigarrow\ \omega_2}{\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}} \quad \underset{\rightsquigarrow\ \omega_3}{\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}} \right)
\end{aligned}
$$

- Podzielić macierze przez siebie $\hat{K} = \mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}$
- tak otrzymane $\hat{K}$ spełnia równanie Schrödingera

Wybór znaku

- Jest jeszcze dowolność wyboru znaku $\pm\omega$
- Trzeba wybrać znak tak, aby ostatecznie macierz $\hat{K}$ była dodatniookreślona
  - W I obszarze stabilności $\Rightarrow + + +$
  - W II obszarze stabilności $\Rightarrow - + +$
  - W III obszarze stabilności $\Rightarrow + - +$
- Czy fizyka klasyczna mówi, który znak wybrać??

$$\mathcal{H} \;=\; \omega_1 A_1 A_1^* + \omega_2 A_2 A_2^* + \omega_3 A_3 A_3^*$$

$$\{A_m, A_n^*\} = -i\delta_{mn}$$

Wybór znaku

- Jest jeszcze dowolność wyboru znaku $\pm\omega$
- Trzeba wybrać znak tak, aby ostatecznie macierz $\hat{K}$ była dodatniookreślona
  - W I obszarze stabilności $\Rightarrow + + +$
  - W II obszarze stabilności $\Rightarrow - + +$
  - W III obszarze stabilności $\Rightarrow + - +$
- Czy fizyka klasyczna mówi, który znak wybrać??

$$\mathcal{H} = \omega_1 A_1 A_1^* + \omega_2 A_2 A_2^* + \omega_3 A_3 A_3^* \qquad \text{(I obszar stabilności)}$$

$$\mathcal{H} = \omega_1 A_1 A_1^* - \omega_2 A_2 A_2^* + \omega_3 A_3 A_3^* \qquad \text{(III obszar stabilności)}$$

$$\{A_m, A_n^*\} = -i\delta_{mn}$$

Podsumowanie

- Obracajacy się potencjał harmoniczny jest równoważny w sensie kanonicznym trzem niezależnym drganiom
- Stabilność układu
  - zależy od prędkości obrotu i dla dostatecznie dużych czestości układ zawsze jest stabilny
  - zależy od kierunku osi obrotu, która wpływa na ilość i wielkość obszarów niestabilności
- Funkcje falową (stanu podstawowego) można zawsze wyznaczyć znając jedynie rozwiązania klasyczne problemu
- Tym samym jest jasne dlaczego niestabilność układu kwantowego pojawia się dla tych samych częstości co niestabilność w świecie klasycznym