Ścisłe rezultaty w teoriach kwantowych

Tomasz Sowiński

23 lutego 2005

Funkcje falowe układów liniowych

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r}\cdot\hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} + \frac{m}{2}\mathbf{r}\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{r} + m\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{r}}$$

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r}\cdot\hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} + \frac{m}{2}\mathbf{r}\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{r} + m\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{r}$$

- Równania Hamiltona

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{r}\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= -m\hat{V}\cdot\mathbf{r} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)\end{aligned}$$

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r}\cdot\hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} + \frac{m}{2}\mathbf{r}\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{r} + m\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{r}}$$

- Równania Hamiltona

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{r} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= -m\hat{V}\cdot\mathbf{r} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} - m\mathbf{g}(t) \end{aligned}}$$

- Mody własne

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned}$$

Dynamika kwantowa

TS, Praca magisterska FUW (2005)

- Hamiltonian kwantowy

$$\boxed{\check{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{\hbar}{i}\mathbf{r}\cdot\hat{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{m}{2}\mathbf{r}\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{r} + m\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{r}}$$

- na początek badamy ewolucję paczki gaussowskiej

$$\boxed{\Psi(\mathbf{r},t) = N(t)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\phi(t)}\exp\left\{-\frac{m}{2\hbar}\left[\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)\right]\cdot\hat{K}(t)\cdot\left[\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)\right] + \frac{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}(t)}{\hbar}\right\}}$$

- Średnie położenie i pęd

$$\begin{aligned}\langle\check{\mathbf{r}}\rangle &= \int \Psi^*(\mathbf{r},t)\,\mathbf{r}\,\Psi(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)\\ \langle\check{\mathbf{p}}\rangle &= \frac{\hbar}{i}\int \Psi^*(\mathbf{r},t)\,\nabla\,\Psi(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \mathbf{P}(t)\end{aligned}$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} &= -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right] \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{R}(t) \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}(t)}{\mathrm{d}t} &= -m\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t) - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t) \\
\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{N(t)}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\hat{K}(t)) \\
\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2}\mathbf{R}(t)\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t)
\end{aligned}$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} &= -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right] \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{R}(t) \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}(t)}{\mathrm{d}t} &= -m\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t) - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t) \\
\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{N(t)}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\hat{K}(t)) \\
\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2}\mathbf{R}(t)\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t)
\end{aligned}
$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right]}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{R}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}(t)}{\mathrm{d}t} = -m\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t) - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N(t)}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2}\mathbf{R}(t)\cdot\hat{V}\cdot\mathbf{R}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz $\hat{K}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right]$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz $\hat{K}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz $\hat{K}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t)\cdot\hat{D}^{-1}(t)$$

$$-\frac{i}{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}\right)\cdot\hat{D}^{-1} + \frac{i}{m}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{D}\right)\cdot\hat{D}^{-1} =$$

$$= \frac{i}{m^2}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m}\hat{\Omega}\cdot\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1} - \frac{i}{m}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\hat{\Omega}$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz $\hat{K}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{K}(t)}{\mathrm{d}t} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - \left[\hat{\Omega}, \hat{K}(t)\right]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t)\cdot\hat{D}^{-1}(t)$$

$$-\frac{i}{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{N}\right)\cdot\hat{D}^{-1} + \frac{i}{m}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{D}\right)\cdot\hat{D}^{-1} =$$

$$= \frac{i}{m^2}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m}\hat{\Omega}\cdot\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1} - \frac{i}{m}\hat{N}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\hat{\Omega}$$

Ewolucja kształtu paczki

- Po uporządkowaniu równania mają postać:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\hat{N} - \hat{\Omega}\cdot\hat{D}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{N}}{\mathrm{d}t} = -m\hat{V}\cdot\hat{D} - \hat{\Omega}\cdot\hat{N}$$

- Przypomnijmy klasyczne równania ruchu:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -m\hat{V}\cdot\mathbf{r} - \hat{\Omega}\cdot\mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)$$

- Kolumny $\hat{N}$ i $\hat{D}$ spełniają klasyczne równania ruchu!
- Kształt paczki nie czuje zewnętrznego pola!

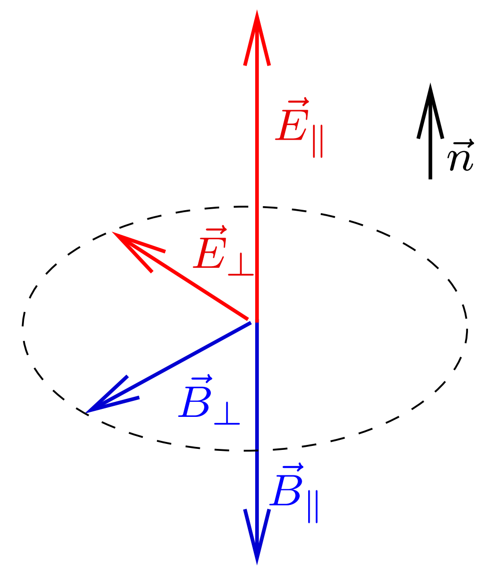
Równanie Diraca z polem kierunkowym

Ścisłe rozwiązania równania Diraca

- Znane ścisłe rozwiązania równania Diraca
  - swobodne
  - w stałym polu elektrycznym i magnetycznym
  - atom wodoru
  - w fali płaskiej **Volkov 1935**
  - w wirze elektromagnetycznym **IBB 2004**
  - w wirze z falą płaską **TS & IBB 2005/06**

Ścisłe rozwiązania równania Diraca

- Znane ścisłe rozwiązania równania Diraca
  - swobodne
  - w stałym polu elektrycznym i magnetycznym
  - atom wodoru
  - w fali płaskiej **Volkov 1935**
  - w wirze elektromagnetycznym **IBB 2004**
  - w wirze z falą płaską **TS & IBB 2005/06**
- Szczególne przypadki **pól kierunkowych**



$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{E}) + \vec{n}\times\vec{B}\\ \vec{B} &= \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{B}) - \vec{n}\times\vec{E}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \vec{E} + i\,\vec{B} \qquad \vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\,\vec{n}\times\vec{F}$$

Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}}$$

- Równanie Diraca

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathsf{P}} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathsf{P}} & \mathsf{P}_0 + m \end{pmatrix} \Psi = 0} \qquad \mathsf{P}^\mu = \mathsf{p}^\mu - eA^\mu$$

Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Równanie Diraca

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 - m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} & \mathsf{P}_0 + m \end{pmatrix}\Psi = 0} \qquad \mathsf{P}^\mu = \mathsf{p}^\mu - eA^\mu$$

- Rozwiązania są postaci:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ \mathsf{P}_0 - m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \end{pmatrix} \phi(\vec{\mathsf{r}}, t)\,\hat{\mathsf{P}}_-\mathsf{v} + \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 + m - \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ -\mathsf{P}_0 - m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \end{pmatrix} \chi(\vec{\mathsf{r}}, t)\,\hat{\mathsf{P}}_+\mathsf{v}$$

$$\left[\mathsf{P}_0^2 - \vec{\mathsf{P}}^2 - m^2 + ie\vec{n}\cdot\vec{F}\right]\phi = 0$$

$$\left[\mathsf{P}_0^2 - \vec{\mathsf{P}}^2 - m^2 + ie\vec{n}\cdot\vec{F}^*\right]\chi = 0$$

Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Równanie Diraca

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 - m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} & \mathsf{P}_0 + m \end{pmatrix}\Psi = 0} \qquad \mathsf{P}^\mu = \mathsf{p}^\mu - eA^\mu$$

- Rozwiązania są postaci:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ \mathsf{P}_0 - m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \end{pmatrix} \phi(\vec{\mathsf{r}}, t)\,\hat{\mathsf{P}}_-\mathsf{v} + \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 + m - \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \\ -\mathsf{P}_0 - m + \vec{\sigma}\cdot\vec{\mathsf{P}} \end{pmatrix} \chi(\vec{\mathsf{r}}, t)\,\hat{\mathsf{P}}_+\mathsf{v}$$

$$\left[\mathsf{P}_0^2 - \vec{\mathsf{P}}^2 - m^2 + ie\vec{n}\cdot\vec{F}\right]\phi = 0$$

$$\left[\mathsf{P}_0^2 - \vec{\mathsf{P}}^2 - m^2 + ie\vec{n}\cdot\vec{F}^*\right]\chi = 0$$

$$\hat{\mathsf{P}}_\pm = \frac{1 \pm \vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\,\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$\boxed{i\partial_t\vec{F} = \nabla\times\vec{F} \qquad \nabla\cdot\vec{F} = 0}$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\,\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$\boxed{i\partial_t\vec{F} = \nabla\times\vec{F} \qquad \nabla\cdot\vec{F} = 0}$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{x}_{\mathrm{R}} & = & x+iy \\ \mathrm{x}_{\mathrm{L}} & = & x-iy \\ \mathrm{t}_{+} & = & t+z \\ \mathrm{t}_{-} & = & t-z \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_{\mathrm{R}}F_z & = & 2\partial_{+}F_x \\ \partial_{\mathrm{L}}F_z & = & 0 \\ \partial_{+}F_z & = & 0 \\ \partial_{-}F_z & = & 2\partial_{\mathrm{L}}F_x \end{array}\right.$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\,\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$\boxed{i\partial_t\vec{F} = \nabla\times\vec{F} \qquad \nabla\cdot\vec{F} = 0}$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathsf{x}_{\mathsf{R}} & = & x + iy \\ \mathsf{x}_{\mathsf{L}} & = & x - iy \\ \mathsf{t}_{+} & = & t + z \\ \mathsf{t}_{-} & = & t - z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_{\mathsf{R}} F_z & = & 2\partial_{+} F_x \\ \partial_{\mathsf{L}} F_z & = & 0 \\ \partial_{+} F_z & = & 0 \\ \partial_{-} F_z & = & 2\partial_{\mathsf{L}} F_x \end{array}\right.$$

- Zadajemy dwie dowolne funkcje: $F_z(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})$ i $H(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} F_x(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) & = & \frac{1}{2}\left[\mathsf{t}_{+}\partial_{\mathsf{R}}F_z + \mathsf{x}_{\mathsf{L}}\partial_{-}F_z + H(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})\right] \\ F_y(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) & = & iF_x(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) \end{array}}$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\boxed{\vec{F} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{F}) + i\,\vec{n}\times\vec{F}}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$\boxed{i\partial_t\vec{F} = \nabla\times\vec{F} \qquad \nabla\cdot\vec{F} = 0}$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathsf{x}_{\mathsf{R}} & = & x + iy \\ \mathsf{x}_{\mathsf{L}} & = & x - iy \\ \mathsf{t}_{+} & = & t + z \\ \mathsf{t}_{-} & = & t - z \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} \partial_{\mathsf{R}} F_z & = & 2\partial_{+} F_x \\ \partial_{\mathsf{L}} F_z & = & 0 \\ \partial_{+} F_z & = & 0 \\ \partial_{-} F_z & = & 2\partial_{\mathsf{L}} F_x \end{array}\right.$$

- Zadajemy dwie dowolne funkcje: $F_z(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})$ i $H(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} F_x(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) & = & \frac{1}{2}\left[\cancel{\mathsf{t}_{+}\partial_{\mathsf{R}}F_z + \mathsf{x}_{\mathsf{L}}\partial_{-}F_z} + H(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{t}_{-})\right] \\ F_y(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) & = & iF_x(\mathsf{x}_{\mathsf{R}},\mathsf{x}_{\mathsf{L}},\mathsf{t}_{-},\mathsf{t}_{+}) \end{array}}$$