

Ścisłe rezultaty w teoriach kwantowych

Tomasz Sowiński

23 lutego 2005



Funkcje falowe układów liniowych

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t) \end{aligned}$$

Hamiltonian układu liniowego

IBB & TS, Phys. Rev. A 71 043610 (2005)

- Hamiltonian układu liniowego

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- Równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t) \end{aligned}$$

- Mody własne

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Dynamika kwantowa

TS, Praca magisterska FUW (2005)

- Hamiltonian kwantowy

$$\check{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \cdot \hat{\Omega} \cdot \nabla + \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{r} + m \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r}$$

- na początek badamy ewolucję paczki gaussowskiej

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = N(t) e^{\frac{i}{\hbar} \phi(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] \cdot \hat{K}(t) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)] + \frac{i \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}(t)}{\hbar} \right\}$$

- Średnie położenie i pęd

$$\langle \check{\mathbf{r}} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$$

$$\langle \check{\mathbf{p}} \rangle = \frac{\hbar}{i} \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} = \mathbf{P}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja parametrów paczki

- Równanie Schrödingera prowadzi do równań na ewolucję parametrów:

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{P}(t)}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{R}(t) - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{P}(t) - m\mathbf{g}(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t)}{2} \text{Tr}(\text{Im}\hat{K}(t))$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\text{Re}\hat{K}(t)) - \frac{\mathbf{P}(t)^2}{2m} + \frac{m}{2} \mathbf{R}(t) \cdot \hat{V} \cdot \mathbf{R}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left(\frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

Ewolucja kształtu paczki

- Kształt kwantowej paczki opisany jest przez macierz \hat{K}

$$\frac{d\hat{K}(t)}{dt} = -i\hat{K}(t)^2 + i\hat{V} - [\hat{\Omega}, \hat{K}(t)]$$

- Wykonujemy dekompozycję

$$\hat{K}(t) = -\frac{i}{m}\hat{N}(t) \cdot \hat{D}^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{m} \left(\frac{d}{dt} \hat{N} \right) \cdot \hat{D}^{-1} + \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dt} \hat{D} \right) \cdot \hat{D}^{-1} = \\ & = \frac{i}{m^2} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} + i\hat{V} + \frac{i}{m} \hat{\Omega} \cdot \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} - \frac{i}{m} \hat{N} \cdot \hat{D}^{-1} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned}$$

Ewolucja kształtu paczki

- Po uporządkowaniu równania mają postać:

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{1}{m}\hat{N} - \hat{\Omega} \cdot \hat{D}$$

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \hat{D} - \hat{\Omega} \cdot \hat{N}$$

- Przypomnijmy klasyczne równania ruchu:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\hat{V} \cdot \mathbf{r} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{p} - m\mathbf{g}(t)$$

- Kolumny \hat{N} i \hat{D} spełniają klasyczne równania ruchu!
- Kształt paczki nie czuje zewnętrznego pola!

Równanie Diraca z polem kierunkowym

Ścisłe rozwiązania równania Diraca

- Znane ścisłe rozwiązania równania Diraca
 - swobodne
 - w stałym polu elektrycznym i magnetycznym
 - atom wodoru
 - w fali płaskiej **Volkov 1935**
 - w wirze elektromagnetycznym **IBB 2004**
 - w wirze z falą płaską **TS & IBB 2005/06**

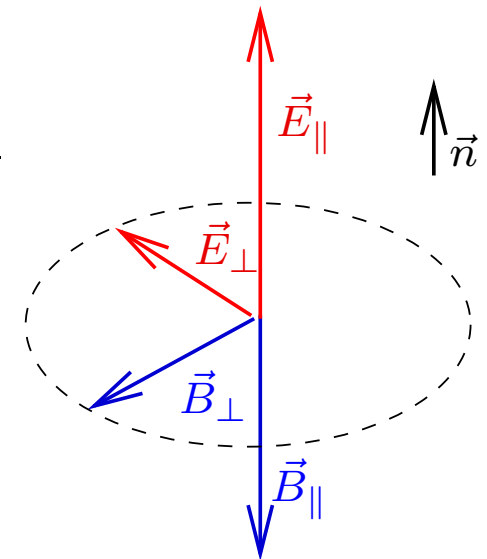
Ścisłe rozwiązania równania Diraca

- Znane ścisłe rozwiązania równania Diraca
 - swobodne
 - w stałym polu elektrycznym i magnetycznym
 - atom wodoru
 - w fali płaskiej **Volkov 1935**
 - w wirze elektromagnetycznym **IBB 2004**
 - w wirze z falą płaską **TS & IBB 2005/06**
- Szczególne przypadki **pól kierunkowych**

$$\vec{E} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E}) + \vec{n} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{B}) - \vec{n} \times \vec{E}$$

$$\vec{F} = \vec{E} + i \vec{B} \quad \vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i \vec{n} \times \vec{F}$$



Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

• Równanie Diraca

$$\begin{pmatrix} P_0 - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} & P_0 + m \end{pmatrix} \Psi = 0$$

$$P^\mu = p^\mu - eA^\mu$$

Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

● Równanie Diraca

$$\begin{pmatrix} P_0 - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} & P_0 + m \end{pmatrix} \Psi = 0 \quad P^\mu = p^\mu - eA^\mu$$

● Rozwiązania są postaci:

$$\Psi = \begin{pmatrix} P_0 + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ P_0 - m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \end{pmatrix} \phi(\vec{r}, t) \hat{P}_- \mathbf{v} + \begin{pmatrix} P_0 + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ -P_0 - m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \end{pmatrix} \chi(\vec{r}, t) \hat{P}_+ \mathbf{v}$$

$$\left[P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2 + ie\vec{n} \cdot \vec{F} \right] \phi = 0$$

$$\left[P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2 + ie\vec{n} \cdot \vec{F}^* \right] \chi = 0$$

Równanie Diraca dla pól kierunkowych

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

Równanie Diraca

$$\begin{pmatrix} P_0 - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{P} & P_0 + m \end{pmatrix} \Psi = 0$$

$$P^\mu = p^\mu - eA^\mu$$

Rozwiązania są postaci:

$$\Psi = \begin{pmatrix} P_0 + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ P_0 - m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \end{pmatrix} \phi(\vec{r}, t) \hat{P}_- \mathbf{v} + \begin{pmatrix} P_0 + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \\ -P_0 - m + \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \end{pmatrix} \chi(\vec{r}, t) \hat{P}_+ \mathbf{v}$$

$$\left[P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2 + ie\vec{n} \cdot \vec{F} \right] \phi = 0$$

$$\left[P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2 + ie\vec{n} \cdot \vec{F}^* \right] \chi = 0$$

$$\hat{P}_\pm = \frac{1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i \vec{n} \times \vec{F}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$i\partial_t \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \quad \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$i\partial_t \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \quad \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_R = x + iy \\ x_L = x - iy \\ t_+ = t + z \\ t_- = t - z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_R F_z = 2\partial_+ F_x \\ \partial_L F_z = 0 \\ \partial_+ F_z = 0 \\ \partial_- F_z = 2\partial_L F_x \end{array} \right.$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$i\partial_t \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \quad \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_R = x + iy \\ x_L = x - iy \\ t_+ = t + z \\ t_- = t - z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_R F_z = 2\partial_+ F_x \\ \partial_L F_z = 0 \\ \partial_+ F_z = 0 \\ \partial_- F_z = 2\partial_L F_x \end{array} \right.$$

- Zadajemy dwie dowolne funkcje: $F_z(x_R, t_-)$ i $H(x_R, t_-)$

$$F_x(x_R, x_L, t_-, t_+) = \frac{1}{2} [t_+ \partial_R F_z + x_L \partial_- F_z + H(x_R, t_-)]$$

$$F_y(x_R, x_L, t_-, t_+) = iF_x(x_R, x_L, t_-, t_+)$$

Kierunkowe pole elektromagnetyczne

$$\vec{F} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{F}) + i\vec{n} \times \vec{F}$$

- Swobodne równania Maxwella

$$i\partial_t \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \quad \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

- Naturalne zmienne dla takiego pola ($\vec{n} = \hat{e}_z$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_R = x + iy \\ x_L = x - iy \\ t_+ = t + z \\ t_- = t - z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_R F_z = 2\partial_+ F_x \\ \partial_L F_z = 0 \\ \partial_+ F_z = 0 \\ \partial_- F_z = 2\partial_L F_x \end{array} \right.$$

- Zadajemy dwie dowolne funkcje: $F_z(x_R, t_-)$ i $H(x_R, t_-)$

$$F_x(x_R, x_L, t_-, t_+) = \frac{1}{2} [\cancel{t_+ \partial_R F_z} + \cancel{x_L \partial_- F_z} + H(x_R, t_-)]$$

$$F_y(x_R, x_L, t_-, t_+) = iF_x(x_R, x_L, t_-, t_+)$$