

Atom dwupoziomowy w niezerowej temperaturze

Tomasz Sowiński

1 października 2008



Atom dwupoziomowy

- Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_I$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = m\sigma_z + \int_0^\infty dk k a^\dagger(k)a(k),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I = \sigma_x \int_0^\infty dk g(k) \Phi(k).$$

- kwantowe pole elektromagnetyczne

$$\Phi(k) = \frac{a(k) + a^\dagger(k)}{\sqrt{2k}}$$

$a(k)$, $a^\dagger(k)$ - operatory anihilacji i kreacji fotonów w odpowiednich modach

Sytuacja fizyczna

● Założenia

- układ opisany hamiltonianem $\hat{\mathcal{H}}$ znajduje się w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem ciepła (termostatem) o temperaturze T
- temperatura termostatu jest na tyle mała, że kreacja rzeczywistych par elektron-pozyton nie występuje

Sytuacja fizyczna

• Założenia

- układ opisany hamiltonianem $\hat{\mathcal{H}}$ znajduje się w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem ciepła (termostatem) o temperaturze T
- temperatura termostatu jest na tyle mała, że kreacja rzeczywistych par elektron-pozyton nie występuje

• Zespół statystyczny

- ustalona liczba fermionów (elektronów) i równa 1
- ustalona temperatura termostatu T
- ustalony potencjał chemiczny μ fotonów w rezerwuarze

Sytuacja fizyczna

• Założenia

- układ opisany hamiltonianem $\hat{\mathcal{H}}$ znajduje się w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem ciepła (termostatem) o temperaturze T
- temperatura termostatu jest na tyle mała, że kreacja rzeczywistych par elektron-pozyton nie występuje

• Zespół statystyczny

- ustalona liczba fermionów (elektronów) i równa 1
- ustalona temperatura termostatu T
- ustalony potencjał chemiczny μ fotonów w rezerwuarze

• Stan kwantowy układu ($\beta = 1/kT$)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\hat{Z}} e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}} \quad \hat{Z} = \text{tr} \left[e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}} \right]$$

Hamiltonian statystyczny $\hat{\mathcal{K}} = \hat{\mathcal{H}} - \mu \mathcal{N}$ \mathcal{N} - operator liczby fotonów

Polaryzowalność atomu

- Wartość oczekiwana dowolnego operatora

$$\langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle = \text{tr}[\hat{\rho} \mathcal{O}] = \frac{\text{tr}[e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}} \mathcal{O}]}{\text{tr}[e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}}]}$$

Polaryzowalność atomu

- Wartość oczekiwana dowolnego operatora

$$\langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle = \text{tr} [\hat{\rho} \mathcal{O}] = \frac{\text{tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}} \mathcal{O}]}{\text{tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{K}}}]}$$

- liniowa polaryzowalność atomu

$$\mathbf{a}(t, t') = -i \theta(t - t') \langle\langle [e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \sigma_x e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}, e^{i\hat{\mathcal{H}}t'} \sigma_x e^{-i\hat{\mathcal{H}}t'}] \rangle\rangle$$

- Łatwo się przekonać, że $\mathbf{a}(t, t')$ zależy jedynie od różnicy $t - t'$ i ma zatem proste przedstawienie fourierowskie

$$\mathbf{a}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-t')} \mathbf{a}(t, t')$$

Druga kwantyzacja

Dotychczasowy opis:



Opis w języku drugiej kwantyzacji:

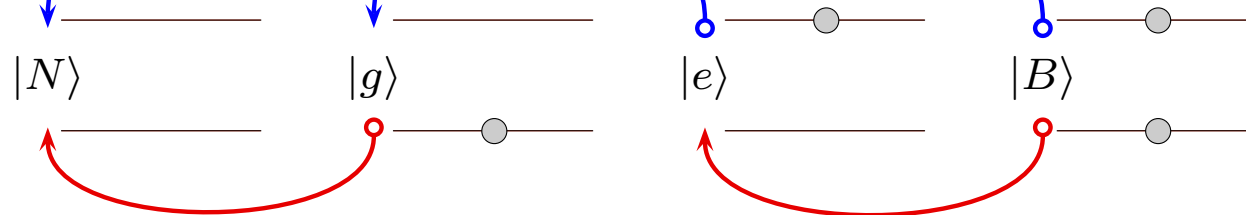


Druga kwantyzacja

Dotychczasowy opis:



Opis w języku drugiej kwantyzacji:



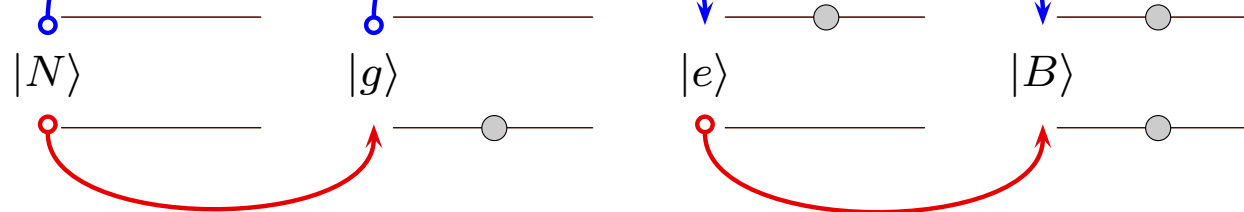
Operatory anihilacji: $\psi_{\downarrow} = |e\rangle\langle B| - |N\rangle\langle g|$, $\psi_{\uparrow} = |g\rangle\langle B| + |N\rangle\langle e|$

Druga kwantyzacja

Dotychczasowy opis:



Opis w języku drugiej kwantyzacji:



- Operatory anihilacji: $\psi_{\downarrow} = |e\rangle\langle B| - |N\rangle\langle g|$, $\psi_{\uparrow} = |g\rangle\langle B| + |N\rangle\langle e|$
- Operatory kreacji: $\psi_{\downarrow}^{\dagger} = |B\rangle\langle e| - |g\rangle\langle N|$, $\psi_{\uparrow}^{\dagger} = |B\rangle\langle g| + |e\rangle\langle N|$

Druga kwantyzacja

Dotychczasowy opis:



Opis w języku drugiej kwantyzacji:



Operatory anihilacji: $\psi_{\downarrow} = |e\rangle\langle B| - |N\rangle\langle g|$, $\psi_{\uparrow} = |g\rangle\langle B| + |N\rangle\langle e|$

Operatory kreacji: $\psi_{\downarrow}^{\dagger} = |B\rangle\langle e| - |g\rangle\langle N|$, $\psi_{\uparrow}^{\dagger} = |B\rangle\langle g| + |e\rangle\langle N|$

Operatory pola fermionowego:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{\dagger} = (\psi_{\uparrow}^{\dagger}, \psi_{\downarrow}^{\dagger})$$

Relacje antykomutacyjne: $\{\Psi_{\alpha}, \Psi_{\beta}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\beta}$, $\{\Psi_{\alpha}, \Psi_{\beta}\} = \{\Psi_{\alpha}^{\dagger}, \Psi_{\beta}^{\dagger}\} = 0$

Druga kwantyzacja

Dotychczasowy opis:



Opis w języku drugiej kwantyzacji:



● Hamiltonian w nowym języku

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$$

$$\mathcal{H}_0 = m\Psi^\dagger \sigma_z \Psi + \int_0^\infty dk k a^\dagger(k) a(k)$$

$$\mathcal{H}_I = \Psi^\dagger \sigma_x \Psi \int_0^\infty dk g(k) \Phi(k)$$

Ewolucja operatorów pola

● Obraz Heisenberga

$$\Upsilon(t) = e^{i\mathcal{H}t} \Upsilon e^{-i\mathcal{H}t}$$

$$(i\partial_t - m_0\sigma_z)\Psi(t) = \int_0^\infty dk g(k)\Phi_k(t)\sigma_x \Psi(t)$$
$$(\partial_t^2 + k^2)\Phi_k(t) = -g(k)\Psi^\dagger(t)\sigma_x \Psi(t)$$

● Obraz Diraca

$$\Upsilon(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \Upsilon e^{-i\mathcal{H}_0 t}$$

$$(i\partial_t - m_0\sigma_z)\psi(t) = 0$$
$$(\partial_t^2 + k^2)\phi_k(t) = 0$$

Ewolucja operatorów pola

● Obraz Heisenberga

$$\Upsilon(t) = e^{i\mathcal{H}t} \Upsilon e^{-i\mathcal{H}t}$$

$$(i\partial_t - m_0\sigma_z)\Psi(t) = \int_0^\infty dk g(k)\Phi_k(t)\sigma_x \Psi(t)$$
$$(\partial_t^2 + k^2)\Phi_k(t) = -g(k)\Psi^\dagger(t)\sigma_x \Psi(t)$$

● Obraz Diraca

$$\Upsilon(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \Upsilon e^{-i\mathcal{H}_0 t}$$

$$(i\partial_t - m_0\sigma_z)\psi(t) = 0$$
$$(\partial_t^2 + k^2)\phi_k(t) = 0$$

● Związek pomiędzy propagatorami chronologicznymi (twierdzenie Lowa i Gell-Manna)

$$\langle \Omega | \mathbb{T} \Psi \Psi \dots \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Phi \dots \Phi | \Omega \rangle = \frac{\langle g | \mathbb{T} \psi \psi \dots \psi^\dagger \psi^\dagger \phi \dots \phi e^{-i \int dt \mathcal{H}_I} | g \rangle}{\langle g | \mathbb{T} e^{-i \int dt \mathcal{H}_I} | g \rangle}$$

Roboczy układ statystyczny

- Rozważamy formalnie pewien kwantowy stan układu
 - Definiujemy nowy operator statystyczny ($\beta = 1/kT$)

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{K}}$$

$$Z = \text{tr} \left[e^{-\beta \mathcal{K}} \right]$$

Hamiltonian statystyczny

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} - \mu \mathcal{N}$$

\mathcal{N} - operator liczby fotonów

Roboczy układ statystyczny

- Rozważamy formalnie pewien kwantowy stan układu
 - Definiujemy nowy operator statystyczny ($\beta = 1/kT$)

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{K}} \quad Z = \text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}}]$$

Hamiltonian statystyczny $\mathcal{K} = \mathcal{H} - \mu \mathcal{N}$ \mathcal{N} - operator liczby fotonów

- Wartość oczekiwana dowolnego operatora

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{tr} [\rho \mathcal{O}] = \frac{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}} \mathcal{O}]}{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}}]}$$

- **Obserwacja:** jeśli operatory $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ działają tylko w podprzestrzeni qubitu to

$$\langle\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle\rangle = \frac{Z}{\widehat{Z}} \langle \Psi^\dagger \mathcal{O}_1 \Psi \cdots \Psi^\dagger \mathcal{O}_n \Psi \rangle$$

Roboczy układ statystyczny

- Rozważamy formalnie pewien kwantowy stan układu
 - Definiujemy nowy operator statystyczny ($\beta = 1/kT$)

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{K}} \quad Z = \text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}}]$$

Hamiltonian statystyczny $\mathcal{K} = \mathcal{H} - \mu \mathcal{N}$ \mathcal{N} - operator liczby fotonów

- Wartość oczekiwana dowolnego operatora

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{tr} [\rho \mathcal{O}] = \frac{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}} \mathcal{O}]}{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}}]}$$

- **Obserwacja:** jeśli operatory $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ działają tylko w podprzestrzeni qubitu to

$$\langle\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle\rangle = \frac{Z}{\widehat{Z}} \langle \Psi^\dagger \mathcal{O}_1 \Psi \cdots \Psi^\dagger \mathcal{O}_n \Psi \rangle$$

- Aby znaleźć $\alpha(t, t')$ wystarczy zatem znać

$$\alpha(t, t') = -i \theta(t - t') \left\langle \left[\Psi^\dagger(t) \sigma_x \Psi(t), \Psi^\dagger(t') \sigma_x \Psi(t') \right] \right\rangle$$

Roboczy swobodny układ statystyczny

- Dla celów praktycznych definiujemy również swobodny układ statystyczny

- Swobodny operator statystyczny ($\beta = 1/kT$)

$$\rho = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta \mathcal{K}_0} \quad Z_0 = \text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}_0}]$$

Hamiltonian statystyczny $\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}_0 - \mu \mathcal{N}$ \mathcal{N} - operator liczby fotonów

- Wartość oczekiwana dowolnego operatora

$$\langle \mathcal{O} \rangle_0 = \text{tr} [\rho_0 \mathcal{O}] = \frac{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}_0} \mathcal{O}]}{\text{tr} [e^{-\beta \mathcal{K}_0}]}$$

Propagatory czasu rzeczywistego

- propagatory retardowane pola elektromagnetycznego
 - pełny propagator

$$\mathcal{D}_R(k, k', t, t') = -i\theta(t - t')\langle[\Phi(t), \Phi(t')]\rangle$$

- propagator pola swobodnego

$$D_R(k, k', t, t') = -i\theta(t - t')\langle[\phi(t), \phi(t')]\rangle_0$$

Propagatory czasu rzeczywistego

- propagatory retardowane pola elektromagnetycznego
 - pełny propagator

$$\mathcal{D}_R(k, k', t, t') = -i\theta(t - t') \langle [\Phi(t), \Phi(t')] \rangle$$

- propagator pola swobodnego

$$D_R(k, k', t, t') = -i\theta(t - t') \langle [\phi(t), \phi(t')] \rangle_0$$

- Wprost z równań dynamiki wynika związek

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R(k, k', k_0) = & D_R(k, k', k_0) + \\ & - \int_0^\infty dk_1 g(k_1) \int_0^\infty dk_2 g(k_2) D_R(k, k_1, k_0) \alpha(k_0) D_R(k_2, k', k_0) \end{aligned}$$

Wielkość $\alpha(k_0)$ można wyznaczyć znając propagator retardowany pola elektromagnetycznego

Formalizm Matsubary ($\tau = it$)

● Obraz Matsubary-Heisenberga

$$\mathcal{O}(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \mathcal{O} e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Phi(k, \tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Phi(k) e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Psi(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Psi e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Psi^\dagger(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Psi^\dagger e^{-\mathcal{K}\tau}$$

Formalizm Matsubary ($\tau = it$)

- Obraz Matsubary-Heisenberga

$$O(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} O e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Phi(k, \tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Phi(k) e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Psi(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Psi e^{-\mathcal{K}\tau}$$

$$\Psi^\dagger(\tau) = e^{\mathcal{K}\tau} \Psi^\dagger e^{-\mathcal{K}\tau}$$

- Obraz Matsubary-Diraca

$$O(\tau) = e^{\mathcal{K}_0\tau} O e^{-\mathcal{K}_0\tau}$$

$$\psi(\tau) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow e^{-m\tau} \\ \psi_\downarrow e^{m\tau} \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger(\tau) = (\psi_\uparrow^\dagger e^{m\tau}, \psi_\downarrow^\dagger e^{-m\tau})$$

$$\phi(k, \tau) = \frac{a(k)e^{-k\tau} + a^\dagger(k)e^{k\tau}}{\sqrt{2k}}$$

$$\mathcal{H}_I(\tau) = e^{\mathcal{K}_0\tau} \mathcal{H}_I e^{-\mathcal{K}_0\tau} = \psi^\dagger(\tau) \sigma_x \psi(\tau) \int_0^\infty dk g(k) \phi(k, \tau)$$

Funkcje korelacji Matsubary

- Temperaturowe funkcje korelacji

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = -\langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}(\tau_1) \cdots \mathcal{O}(\tau_n) \rangle \quad 0 \leq \tau_i \leq \beta$$

Funkcje korelacji Matsubary

- Temperaturowe funkcje korelacji

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = -\langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}(\tau_1) \cdots \mathcal{O}(\tau_n) \rangle \quad 0 \leq \tau_i \leq \beta$$

- Propagatory temperaturowe

- Propagator fermionowy

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbb{T}_\tau \Psi_\alpha(\tau_1) \Psi_\beta^\dagger(\tau_2) \rangle$$

- Propagator fotonowy

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbb{T}_\tau \Phi(k, \tau_1) \Phi(k', \tau_2) \rangle$$

- Propagatory temperaturowe są funkcją jedynie różnicy swoich argumentów. To znaczy, że można ograniczyć się do argumentów spełniających warunek

$$-\beta \leq \tau_1 - \tau_2 \leq \beta$$

Reprezentacja Fouriera

- Propagatory temperaturowe są cykliczne na odcinku 2β . Mają zatem przedstawienie w postaci szeregów Fouriera

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\mathcal{G}}(\omega_n)$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{\beta}$$

Reprezentacja Fouriera

- Propagatory temperaturowe są cykliczne na odcinku 2β . Mają zatem przedstawienie w postaci szeregów Fouriera

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\mathcal{G}}(\omega_n)$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{\beta}$$

- Propagator bozonów/fermionów ma dodatkową własność

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tau) = \pm \tilde{\mathcal{G}}(\tau + \beta)$$

$$\begin{cases} +1 & \text{bozony} \\ -1 & \text{fermiony} \end{cases}$$

- Współczynniki fourierowskie mają zatem postać

$$\tilde{\mathcal{G}}(\omega_n) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \tilde{\mathcal{G}}(\tau)$$

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{bozony} \\ \frac{2(n+1)\pi}{\beta} & \text{fermiony} \end{cases}$$

Temperaturowe propagatory swobodne

- swobodny propagator fermionowy

- definicja

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbb{T}_\tau \psi_\alpha(\tau_1) \psi_\beta^\dagger(\tau_2) \rangle_0$$

- składniki fourierowskie

$$\tilde{S}(\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - m\sigma_z}$$

$$\omega_n = \frac{2(n+1)\pi}{\beta}$$

Temperaturowe propagatory swobodne

● swobodny propagator fermionowy

- definicja

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbb{T}_\tau \psi_\alpha(\tau_1) \psi_\beta^\dagger(\tau_2) \rangle_0$$

- składniki fourierowskie

$$\tilde{S}(\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - m\sigma_z}$$

$$\omega_n = \frac{2(n+1)\pi}{\beta}$$

● swobodny propagator fotonowy

- definicja

$$\tilde{D}(k, k', \tau_1, \tau_2) = -\langle \mathbb{T}_\tau \phi(k, \tau_1) \phi(k', \tau_2) \rangle_0$$

- składniki fourierowskie

$$\tilde{D}(k, k', \omega_n) = -\frac{\delta(k - k')}{\omega_n^2 + k^2}$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$$

Rachunek perturbacyjny

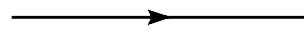
- Związek podstawowy pomiędzy temperaturowymi funkcjami korelacji


$$\begin{aligned}\langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}_1(\tau_1) \cdots \mathcal{O}_n(\tau_n) \rangle &= \\ &= \frac{\langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}_1(\tau_1) \cdots \mathcal{O}_n(\tau_n) e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}_I(\tau)} \rangle_0}{\langle \mathbb{T}_\tau e^{-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}_I(\tau)} \rangle_0}\end{aligned}$$

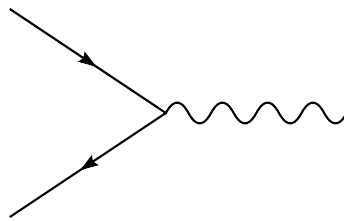
- Twierdzenie Wicka w skończonej temperaturze

$$\langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_0 = \sum_{\sigma} (-1)^{\kappa} \langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}_{\sigma_1} \mathcal{O}_{\sigma_2} \rangle_0 \cdots \langle \mathbb{T}_\tau \mathcal{O}_{\sigma_{n-1}} \mathcal{O}_{\sigma_n} \rangle_0$$


Reguły Matsubary-Feynmana



$$\Rightarrow -\tilde{S}(\omega_n) = \frac{-1}{i\omega_n - m\sigma_z} \quad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$$

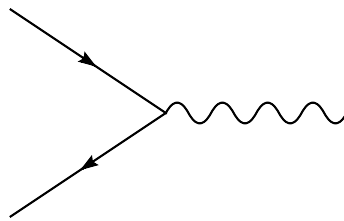

$$\Rightarrow -\tilde{D}(\omega_n) = \frac{\delta(k - k')}{\omega_n^2 + k^2} \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$$


$$\Rightarrow -V(k) = g(k)\sigma_x$$

Reguły Matsubary-Feynmana


$$\Rightarrow -\tilde{S}(\omega_n) = \frac{-1}{i\omega_n - m\sigma_z} \quad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$$


$$\Rightarrow -\tilde{D}(\omega_n) = \frac{\delta(k - k')}{\omega_n^2 + k^2} \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$$


$$\Rightarrow -V(k) = g(k)\sigma_x$$

- W wierzchołku spełnione jest zachowanie częstości ω_n
- Każda zamknięta pętla fermionowa oznacza pomnożenie wyrażenia przez -1 i ślad odpowiednich macierzy
- Na końcu wycałkować po wszystkich wewnętrznych pędach k i wysumować po wszystkich wewnętrznych częstościach ω_n . Każdą sumę podzielić przez β

Temperaturowy propagator fotonu

- Propagator fotonu w pełnej teorii

$$\begin{aligned} \text{Full propagator} &= \text{Free propagator} + \text{1-loop correction} + \text{2-loop correction} + \dots \\ &= \text{Free propagator} + \text{Free propagator} \cdot \left[\frac{1}{1 - \text{1-loop correction}} \right] \end{aligned}$$

Temperaturowy propagator fotonu

- Propagator fotonu w pełnej teorii

$$\begin{aligned}
 \text{Full propagator} &= \text{Free propagator} + \text{Self-energy} + \text{Higher-order corrections} + \dots \\
 &= \text{Free propagator} + \text{Free propagator} \cdot \text{Self-energy} \cdot \text{Full propagator} \\
 &= \text{Free propagator} \cdot \left(1 - \text{Self-energy} \right)^{-1} \\
 &= \text{Free propagator} \cdot \left(1 - \int_0^\infty dk \frac{g^2(k)}{\omega_n^2 + k^2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Temperaturowy propagator fotonu

- Propagator fotonu w pełnej teorii

$$\text{Full propagator} = \text{Free propagator} + \text{Self-energy} + \text{Higher-order corrections} + \dots$$

$$= \text{Free propagator} + \text{Free propagator} \cdot \frac{1}{1 - \text{Self-energy}} \cdot \text{Free propagator}$$

$$\text{Self-energy} = \text{Loop diagrams} + \dots$$

$$\text{Free propagator} = - \int_0^\infty dk \frac{g^2(k)}{\omega_n^2 + k^2}$$

- Temperaturowa macierz przejścia

$$- \tilde{T}(\omega_n) = \frac{1}{\text{Self-energy} - 1}$$

Drugi rząd rachunku zaburzeń

$$-\tilde{P}^{(2)}(\omega_n) = \text{Diagram} = -\frac{1}{\beta} \sum_{n'} \text{Tr} \{ \sigma_x \tilde{S}(\omega_{n'} + \omega_n) \sigma_x \tilde{S}(\omega_{n'}) \}$$

- Ze względu na statystyki kwantowe

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} \quad \omega_{n'} = \frac{(2n' + 1)\pi}{\beta}$$

- Po wykonaniu sumowania i uporządkowaniu

$$\tilde{P}^{(2)}(\omega_n) = -\frac{4m}{4m^2 + \omega_n^2} \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)$$

- To daje temperaturową macierz przejścia

$$\tilde{T}^{(2)}(\omega_n) = \frac{4m}{(4m^2 + \omega_n^2) \coth\left(\frac{\beta m}{2}\right) - 4m\tilde{h}(\omega_n)}$$

Co dalej?

- Propagator temperaturowy (w urojonym czasie $\tau = it$)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = & \tilde{D}(k, k', \omega_n) + \\ & - \left[\int_0^\infty dk_1 g(k_1) \tilde{D}(k, k_1, \omega_n) \right] \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\omega_n) \cdot \left[\int_0^\infty dk_2 g(k_2) \tilde{D}(k_2, k', \omega_n) \right] \end{aligned}$$

Co dalej?

- Propagator temperaturowy (w urojonym czasie $\tau = it$)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = & \tilde{D}(k, k', \omega_n) + \\ & - \left[\int_0^\infty dk_1 g(k_1) \tilde{D}(k, k_1, \omega_n) \right] \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\omega_n) \cdot \left[\int_0^\infty dk_2 g(k_2) \tilde{D}(k_2, k', \omega_n) \right]\end{aligned}$$

- Propagator retardowany (w rzeczywistym czasie t)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = & D_R(k, k', k_0) + \\ & - \left[\int_0^\infty dk_1 g(k_1) D_R(k, k_1, k_0) \right] \cdot \alpha(k_0) \cdot \left[\int_0^\infty dk_2 g(k_2) D_R(k_2, k', k_0) \right]\end{aligned}$$

- Jeśli znalazłbyśmy związek pomiędzy propagatorami temperaturowymi i retardowanymi to moglibyśmy odtworzyć funkcję $\alpha(k_0)$ ze znajomości macierzy przejścia $\tilde{\mathbf{T}}(\omega_n)$

Reprezentacja spektralna

- Propagator temperaturowy

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{i\omega_n - M}$$

- Propagator retardowany

$$\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{k_0 - M + i\epsilon}$$

- Macierz spektralna

$$\mathfrak{M}(M, k, k') = \sum_{n,m} \delta(M + K_n - K_m) \frac{e^{-\beta K_m} - e^{-\beta K_n}}{Z} \langle n | \Phi(k) | m \rangle \langle m | \Phi(k') | n \rangle$$

Przedłużenie analityczne

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{i\omega_n - M}$$

$$\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{k_0 - M + i\epsilon}$$


Przedłużenie analityczne

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{i\omega_n - M}$$

$$\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{k_0 - M + i\epsilon}$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{z - M}$$

Przedłużenie analityczne

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{i\omega_n - M} \quad \mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{k_0 - M + i\epsilon}$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{z - M}$$

● Retardowany \rightarrow Temperaturowy

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \mathcal{D}_R(k, k', i\omega_n) \quad \omega_n > 0$$
$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', -\omega_n) = \tilde{\mathcal{D}}^*(k, k', \omega_n)$$

Przedłużenie analityczne

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{i\omega_n - M}$$
$$\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{k_0 - M + i\epsilon}$$
$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dM \frac{\mathfrak{M}(M, k, k')}{z - M}$$

- Retardowany \rightarrow Temperaturowy

$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', \omega_n) = \mathcal{D}_R(k, k', i\omega_n) \quad \omega_n > 0$$
$$\tilde{\mathcal{D}}(k, k', -\omega_n) = \tilde{\mathcal{D}}^*(k, k', \omega_n)$$

- Temperaturowy \rightarrow Retardowany

Procedura niejednoznaczna matematycznie, ale fizycznie jednoznaczna

$$\mathcal{D}_R(k, k', k_0) = \tilde{\mathcal{D}}(k, k', -ik_0 + \epsilon) \quad k_0 > 0$$

Polaryzowalność atomu

Wykonując przedłużenie analityczne otrzymujemy w drugim rzędzie rachunku zaburzeń

$$\alpha^{(2)}(\omega) = \frac{4m}{(4m^2 - \omega^2) \coth\left(\frac{\beta m}{2}\right) - 4m \left[\hat{\Delta}(\omega) + i \operatorname{sign}(\omega) \hat{\Gamma}(\omega) \right]}$$

gdzie

$$\Delta(\omega) = \text{P} \int_0^\infty dk \frac{g^2(\omega)}{k^2 - \omega^2}$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\pi g^2(\omega)}{2|\omega|}$$

Polaryzowalność atomu

- Wzór na polaryzowalność

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{Z}{\widehat{Z}} \alpha(\omega)$$

Polaryzowalność atomu

- Wzór na polaryzowalność

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{Z}{\widehat{Z}} \alpha(\omega)$$

- W najniższym rzędzie rachunku perturbacyjnego wystarczające jest przybliżenie

$$\frac{Z}{\widehat{Z}} \approx \frac{Z_0}{\widehat{Z}_0} = \frac{e^{-\beta m} + e^{\beta m} + 2}{e^{-\beta m} + e^{\beta m}} = \frac{\tanh(\beta m)}{\tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)}$$

Polaryzowalność atomu

- Wzór na polaryzowalność

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{Z}{\widehat{Z}} \alpha(\omega)$$

- W najniższym rzędzie rachunku perturbacyjnego wystarczające jest przybliżenie

$$\frac{Z}{\widehat{Z}} \approx \frac{Z_0}{\widehat{Z}_0} = \frac{e^{-\beta m} + e^{\beta m} + 2}{e^{-\beta m} + e^{\beta m}} = \frac{\tanh(\beta m)}{\tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)}$$

- Polaryzowalność w drugim rzędzie

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{\tanh(\beta m)}{\tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)} \frac{4m}{(4m^2 - \omega^2) \coth\left(\frac{\beta m}{2}\right) - 4m \left[\widehat{\Delta}(\omega) + i \operatorname{sign}(\omega) \widehat{\Gamma}(\omega) \right]}$$

Polaryzowalność atomu

$$\alpha(\omega) = \frac{4m \tanh(\beta m)}{4m^2 - \omega^2 - 4m \left[\hat{\Delta}_T(\omega) + i \operatorname{sign}(\omega) \hat{\Gamma}_T(\omega) \right]}$$

$$\Delta_T(\omega) = \hat{\Delta}(\omega) \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)$$

$$\Gamma_T(\omega) = \hat{\Gamma}(\omega) \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)$$

- Spodziewana zależność amplitudy polaryzowalności od temperatury
- Niespodziewane wyostrenie rezonansu przy wzroście temperatury

Motional narrowing